40/60

ION M. MIU

Metode noi

PENTRU

CALCULUL SECȚIUNILOR SOLICITATE EXCENTRIC

Scanned with OKEN Scanner

Ing. ION M. MIU

Ungureanu U.

Metode noi
PENTRU
CALCULUL SECȚIUNILOR SOLICITATE EXCENTRIC

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI 1956

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

În această lucrare sînt prezentate o serie de metode originale pentru calculul secțiunilor solicitate excentric.

Metodele prezentate au fost justificate teoretic și aplicate la mai multe probleme, cum sînt:

— calculul masivelor de zidării: infrastructurile podurilor, zidurile de sprijin cu secțiuni neregulate (de exemplu, zidurile întoarse ale unor poduri) etc.;

— calculul după metoda rezistențelor admisibile al secțiunilor de beton armat, în special la poduri.

Metodele pot fi aplicate și în probleme din alte domenii, cum sînt construcțiile hidrotehnice etc.

O parte dintre aceste lucrări au făcut obiectul unor articole publicate de autor în revistele tehnice, începînd din 1952.

Utilizarea metodelor expuse în lucrare prezintă avantajele că timpul de proiectare este simțitor redus și că posibilitatea erorilor de calcul este mică.

În toate problemele tratate s-a presupus că se cunosc noțiunile elementare din rezistența materialelor cum și cele din matematici. Totuși, pentru ușurarea urmăririi lucrării, s-au dat unele indicații matematice asupra involuției și transformării prin polare reciproce.

Autorul mulțumește pe această cale prof. A. Caracostea, prof. P. Mazilu și prof. D. Mangeron pentru sugestiile primite în ceea ce privește redactarea lucrării.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

NOȚIUNI FUNDAMENTALE

§ 1. CONSIDERAȚII GENERALE. IPOTEZE

In lucrarea de față sînt expuse metode originale pentru calculul secțiunilor supuse la solicitări excentrice normale pe secțiune.

Problema determinării eforturilor unitare la secțiunile solicitate excentric se rezolvă, în prezent, prin metodele analitice sau grafice cunoscute din rezistența materialelor. In multe cazuri însă, și mai ales la secțiuni nesimetrice, aplicarea metodelor clasice cunoscute devine laborioasă.

Metodele prezentate în această lucrare au avantajul de a fi generale și de o remarcabilă simplitate în aplicare.

Pentru a ajunge la aceste metode, admitem valabilitatea aceloraşi ipoteze generale din rezistența materialelor, anume:

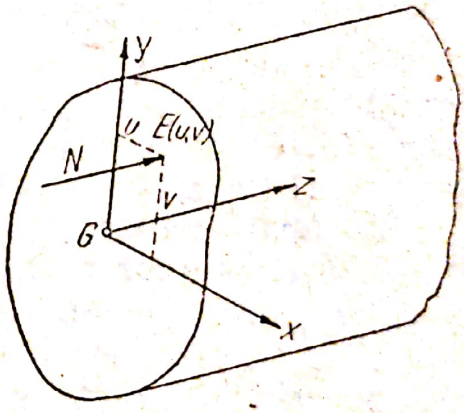

Fig. 1.1

— ipoteza materialului ideal elastic,

— ipoteza proporționalității între eforturile unitare și deformațiile specifice (legea lui Hooke),

— ipoteza secțiunilor plane (ipoteza lui Bernoulli).

Vom considera numai cazurile în care pe secțiune nu iau naștere decît eforturi unitare normale, deci forța care solicită secțiunea este normală pe aceasta într-un punct oarecare $E(u, v)$ (fig. 1.1).

Raportînd secțiunea la un sistem de axe de coordonate ortogonale, care trec prin centrul ei de greutate (secțiunea fiind în planul xOy), condiția de echivalență între eforturile unitare și solicitările din secțiune ne permite să scriem relațiile:

$$\int \sigma dA = N; \quad \int \sigma y dA = M_x, \quad \int \sigma x dA = M_y. \tag{1.1}$$

Forța de valoare N care solicită normal secțiunea în punctul $E(u, v)$ este echivalentă cu sistemul: N (forța axială aplicată în G), M_x, M_y (componentele momentelor față de axe), unde:

$$N \cdot u = M_y, \quad N \cdot v = M_x. \tag{1.2}$$

In ceea ce privește semnele, stabilim următoarele reguli:

Forța axială: vom considera forța axială N, care solicită secțiunea, pozitivă în cazul compresiunii și negativă în cazul întinderii.

Momente: vom considera secțiunea raportată la un sistem de axe rectangulare și solicitată de o forță N în punctul $E(u, v)$. Facem convenția ca:

$$M_x = N \cdot v, \quad M_y = N \cdot u.$$

Semnele momentelor rezultă, luînd pentru N semnul stabilit, iar pentru u și v semnele lor.

In cazul cînd considerăm axele de coordonate oblice, distanțele de la punctul de aplicare al forței la axe le luăm, respectiv, cu același semn ca și coordonatele punctului de aplicare al forței.

Eforturile unitare rezultate din formule cu semnul plus vor fi de compresiune, iar cele cu minus vor fi de întindere.

Convenția semnelor introdusă aici prezintă avantajul că formulele în care intră momente capătă o formă canonică, spre deosebire de cele stabilite ținînd seama de rotiri, care sînt nesimetrice din punctul de vedere al semnelor.

Celelalte formule, în care nu se introduc direct momentele și care se obțin prin regula de mai sus, sînt identice cu cele stabilite prin regula rotirilor.

§ 2. EXPRESIILE ANALITICE ALE EFORTULUI UNITAR

Vom determina pentru efortul unitar σ expresii generale, corespunzătoare diverselor poziții ale axelor de coordonate

și, în cazurile cînd sistemul de referință are poziții particulare, vom regăsi formulele cunoscute.

Vom raporta secțiunea la un sistem de referință oblic XOY într-un punct oarecare O al ei (fig. 1.2), și vom stabili expresia efortului unitar σ într-un punct P oarecare al secțiunii, cunoscînd forța axială N, și componentele M_X și M_Y ale momentului încovoietor față de axele de referință alese.

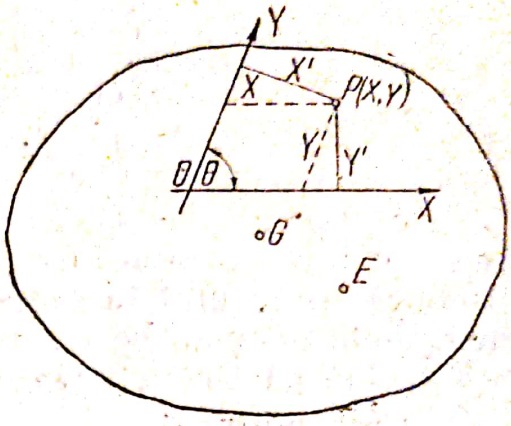

Fig. 1.2

Notăm cu X și Y coordonatele punctului P și cu X' și Y' distanțele de la acest punct la axele OY și OX.

Pe baza ipotezei lui Bernoulli a secțiunilor plane și a valabilității legii lui Hooke, rezultă că eforturile unitare normale se repartizează liniar pe secțiune și deci pot fi exprimate prin funcția:

$$\sigma = aX' + bY' + c, \tag{1.3}$$

unde a, b și c sînt coeficienți pe care-i vom determina folosind ecuațiile de echivalență (1.1).

Înlocuind în (1.1) pe σ din expresia (1.3) și introducînd componentele momentului sub forma M_X și M_Y, obținem:

$$\left.\begin{aligned} a\int X'dA + b\int Y'dA + c\int dA &= N \\ a\int X'Y'dA + b\int Y'^2dA + c\int Y'dA &= M_X \\ a\int X'^2dA + b\int X'Y'dA + c\int X'dA &= M_Y. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

În aceste ecuații, unde $\int dA = A$ este aria secțiunii, avem: $\int X'dA = S_Y$, $\int Y'dA = S_X$, momentele statice ale secțiunii în raport cu axele Y și X, $\int X'^2dA = I_Y$, $\int Y'^2dA = I_X$, $\int X'Y'dA = I_{XY}$, momentele de inerție în raport cu Y și X și momentul centrifugal.

Rezultă că sistemul de ecuații (1.4) poate fi scris sub forma:

$$\left.\begin{aligned} aS_Y + bS_X + cA &= N \\ aI_{XY} + bI_X + cS_X &= M_X \\ aI_Y + bI_{XY} + cS_Y &= M_Y. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Prin eliminarea lui a, b și c între sistemul (1.5) și ecuația (1.3) se obține o relație în care intră efortul unitar σ:

$$\begin{vmatrix} \sigma & X' & Y' & 1 \\ N & S_Y & S_X & A \\ M_X & I_{XY} & I_X & S_X \\ M_Y & I_Y & I_{XY} & S_Y \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.6)$$

Această relație (1.6) permite aflarea valorii efortului unitar σ într-un punct oarecare P al secțiunii, în funcție de distanțele punctului la axele de coordonate oblice XOY și de elementele geometrice ale secțiunii. Din relația (1.6), făcînd $\sigma=0$, vom găsi ecuația axei neutre.

Astfel, notînd:

$$D = \begin{vmatrix} S_Y & S_X & A \\ I_{XY} & I_X & S_X \\ I_Y & I_{XY} & S_Y \end{vmatrix}, \qquad (1.7)$$

expresia efortului unitar σ obținută din relația (1.6) este:

$$\sigma = \frac{1}{D}\left\{\begin{vmatrix} N & S_X & A \\ M_X & I_X & S_X \\ M_Y & I_{XY} & S_Y \end{vmatrix} X' + \begin{vmatrix} S_Y & N & A \\ I_{XY} & M_X & S_X \\ I_Y & M_Y & S_Y \end{vmatrix} Y' + \begin{vmatrix} S_Y & S_X & N \\ I_{XY} & I_X & M_X \\ I_Y & I_{XY} & M_Y \end{vmatrix}\right\} \qquad (1.8)$$

Ecuația axei neutre, care se obține făcînd aici $\sigma=0$, are forma:

$$\begin{vmatrix} N & S_X & A \\ M_X & I_X & S_X \\ M_Y & I_{XY} & S_Y \end{vmatrix} X' + \begin{vmatrix} S_Y & N & A \\ I_{XY} & M_X & S_X \\ I_Y & M_Y & S_Y \end{vmatrix} Y' + \begin{vmatrix} S_Y & S_X & N \\ I_{XY} & I_X & M_X \\ I_Y & I_{XY} & M_Y \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.9)$$

Dacă în relațiile (1.8) și (1.9) se înlocuiesc $X' = X \sin\theta$ și $Y' = Y \sin\theta$, se obține expresia efortului unitar și ecuația axei neutre în funcție de coordonatele oblice ale punctului respectiv. Relațiile (1.8) și (1.9) astfel stabilite pentru un sistem de axe oarecare pot căpăta diferite forme, în funcție de poziția originii și de direcțiile axelor de coordonate. Astfel, vom avea cazurile:

Scanned with OKEN Scanner

a) **Originea în punctul E de aplicare al forței N, iar axele de coordonate ortogonale.**

In acest caz $M_X=M_Y=0$, astfel încît expresia efortului unitar (1.8) devine:

$$\sigma=\frac{N}{D}\left\{\begin{vmatrix} I_X & S_X \\ I_{XY} & S_Y \end{vmatrix} X+\begin{vmatrix} S_X & I_{XY} \\ S_Y & I_Y \end{vmatrix} Y+\begin{vmatrix} I_{XY} & I_X \\ I_Y & I_{XY} \end{vmatrix}\right\} \tag{1.10}$$

Ecuația axei neutre se obține din (1.9) și are forma:

$$\begin{vmatrix} I_X & S_X \\ I_{XY} & S_Y \end{vmatrix} X+\begin{vmatrix} S_X & I_{XY} \\ S_Y & I_Y \end{vmatrix} Y+\begin{vmatrix} I_{XY} & I_X \\ I_Y & I_{XY} \end{vmatrix}=0. \tag{1.11}$$

b) **Originea în centrul de greutate al secțiunii, și axele de coordonate ortogonale.**

In acest caz, expresiile efortului unitar σ și a ecuației axei neutre se deduc din relațiile (1.8) și (1.9), unde X, X' și Y, Y' se înlocuiesc cu x și y, iar $S_x=S_y=0$.

Prin dezvoltarea acestor ecuații, astfel obținute, se ajunge la expresia efortului unitar:

$$\sigma=\frac{M_xI_{xy}-M_yI_x}{I_{xy}^2-I_xI_y}x+\frac{M_yI_{xy}-M_xI_y}{I_{xy}^2-I_xI_y}y+\frac{N}{A}, \tag{1.12}$$

și la ecuația axei neutre:

$$(M_xI_{xy}-M_yI_x)x+(M_yI_{xy}-M_xI_y)y+\frac{N}{A}(I_{xy}^2-I_xI_y)=0. \tag{1.13}$$

c) **Originea în centrul de greutate al secțiunii, axele de coordonate fiind conjugate în raport cu secțiunea.**

In expresiile (1.8), (1.9) trebuie să facem $S_X=S_Y=0$ și $I_{XY}=0$, astfel că pentru efortul unitar, respectiv pentru ecuația axei neutre, vom obține:

$$\sigma=\frac{M_Y}{I_Y}X'+\frac{M_X}{I_X}Y'+\frac{N}{A}; \tag{1.14}$$

$$\frac{M_Y}{I_Y}X'+\frac{M_X}{I_X}Y'+\frac{N}{A}=0. \tag{1.15}$$

d) **Axele de coordonate sînt axele principale centrale.**

In acest caz I_X și I_Y devin momentele principale de inerție I_x și I_y ale secțiunii.

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul acestora, din relația (1.14) se obține expresia cunoscută a efortului unitar σ:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N}{A}, \tag{1.16}$$

iar din relația (1.15) ecuația axei neutre:

$$\frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{N}{A} = 0. \tag{1.17}$$

Dacă u și v sînt coordonatele punctului E de aplicare al forței, avem $M_y = N \cdot u$ și $M_x = N \cdot v$, astfel încît relațiile (1.16), (1.17) capătă forma:

$$\sigma = N\left(\frac{ux}{I_y} + \frac{vy}{I_x} + \frac{1}{A}\right) \tag{1.18}$$

$$\frac{ux}{I_y} + \frac{vy}{I_x} + \frac{1}{A} = 0. \tag{1.19}$$

Introducînd apoi razele de girație principale, expresiile (1.18), (1.19) devin:

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(\frac{ux}{i_y^2} + \frac{vy}{i_x^2} + 1\right) \tag{1.20}$$

$$\frac{ux}{i_y^2} + \frac{vy}{i_x^2} + 1 = 0. \tag{1.21}$$

Aplicarea formulelor stabilite mai sus este ușor de făcut, în cazul unor secțiuni simetrice sau pentru secțiunile utilizate în tehnică, ale căror momente de inerție se găsesc gata calculate în tabele. Cînd însă conturul secțiunii este oarecare, calculul momentelor de inerție devine, așa cum am arătat, laborios.

§ 3. CLASIFICAREA PROBLEMEI DUPĂ PUNCTUL DE APLICARE AL FORȚEI SOLICITANTE

In studiul secțiunilor solicitate excentric pot fi socotite distincte trei cazuri și anume:

a) **Forța N se aplică în centrul de greutate al secțiunii.**

In acest caz excentricitatea este nulă, secțiunea fiind supusă la un efort axial pur.

b) **Forța N acționează secțiunea într-un punct E diferit de centrul de greutate G, la distanță finită de acesta.**

Acesta este cazul obișnuit al solicitării excentrice.

c) Forța N acționează secțiunea într-un punct la infinit. Acesta este cazul încovoierii pure, în care forța de acționare devine nulă.

Vom reaminti, pe scurt, considerațiile care permit această particularizare.

Considerăm în plan un sistem de axe ortogonale xOy. Dreapta OA care trece printr-un punct $A(x_1, y_1)$ are ecuația $y = \frac{y_1}{x_1} x$, cu coeficientul unghiular $m = \frac{y_1}{x_1}$.

Această dreaptă are la infinit un punct Q de coordonate $x' = \infty$, $y' = \infty$; cum însă între coordonatele tuturor punctelor dreptei OA avem relația: $\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} = m$, pentru punctul de la infinit avem de asemenea $\frac{y'}{x'} = m$.

Rezultă că m, coeficientul unghiular al unei drepte, dă punctul de la infinit al dreptei. Astfel, toate dreptele $y = mx + n$, unde m este constant iar n ia diferite valori, sînt concurente la infinit în punctul definit de coeficientul unghiular m. Toate punctele de la infinit dintr-un plan se găsesc pe aceeași dreaptă, numită dreapta de la infinit a planului. Ori ce punct de pe această dreaptă dă o direcție, și invers.

Forța N aplicată în punctul E al unei secțiuni A (fig. 1.3) se reduce, în centrul de gretuate G al secțiunii, la un sistem echivalent compus din forța N și momentul $M = Na$ (unde $a = GE$), al cărui vector situat în planul secțiunii este dirijat după o direcție m normală la GE.

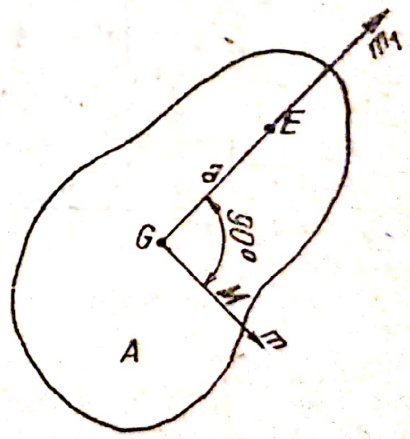

Fig. 1.3

Cînd punctul E tinde pe direcția m_1 către infinit, atunci, pentru ca $M = \lim_{E \to \infty} Na$ să aibă sens, trebuie ca $N \to 0$. Rezultă deci că $M = \lim_{\substack{a \to \infty \\ N \to 0}} Na$ poate avea o valoare finită, egală cu un moment oarecare al cărui vector de direcție m, situat în planul secțiunii, este normal pe direcția m_1. In cazul acesta, secțiunea este acționată la încovoiere pură. In cele ce urmează, orice secțiune solicitată de un moment va fi considerată ca solicitată de o forță N, aplicată într-un punct care tinde spre infinit după direcția m_1, normală pe direcția m a vectorului moment, cînd forța N tinde către zero.

Această interpretare are avantajul că permite să considerăm cazul secțiunilor solicitate la încovoiere pură, ca un caz particular al secțiunilor solicitate excentric; astfel, din formulele sau construcțiile grafice pe care le vom stabili pentru acestea din urmă, vom deduce ușor pe cele aplicabile în cazul secțiunilor supuse la un moment oarecare.

§ 4. DETERMINAREA EXPRESIEI EFORTULUI UNITAR ȘI A PUNCTULUI DE APLICARE AL FORȚEI, CÎND SE CUNOAȘTE AXA NEUTRĂ

În legătură cu cele enunțate, vom rezolva următoarele două probleme:

— Avînd o secțiune A și cunoscînd poziția axei neutre Δ, cum și mărimea solicitării normale N, să determinăm expresia efortului unitar σ într-un punct oarecare C situat la distanța s de axa neutră (fig. 1.4).

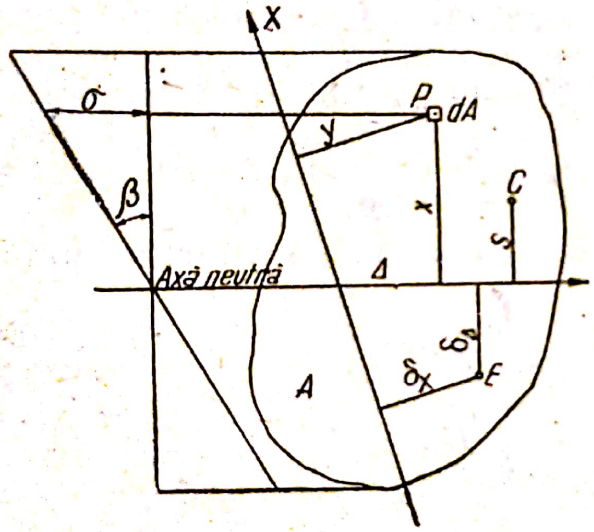

Fig. 1.4

— Pentru aceeași secțiune, să determinăm poziția punctului E de aplicare al forței, considerînd cunoscută axa neutră respectivă Δ.

Luăm ca axe de referință axa Δ și o axă oarecare X.

Vom distinge două cazuri:

a) **Punctul E de aplicare al forței este la distanță finită de aceste axe.**

Notînd cu δ_Δ respectiv δ_x, distanțele punctului E de aplicare al forței la axele de referință Δ și X, și cu x respectiv y distanțele unui punct curent P al secțiunii la aceleași axe (fig. 1.4), efortul unitar în punctul curent P este:

$$\sigma = x \operatorname{tg} \beta = kx. \tag{1.22}$$

Notînd cu dA elementul de suprafață, efortul N va fi:

$$N = \int \sigma dA = k \int x dA = k S_\Delta,$$

de unde:

$$k = \frac{N}{S_\Delta}, \tag{1.23}$$

în care: S_Δ este momentul static al secțiunii în raport cu axa neutră Δ.

Pentru un punct oarecare C situat la distanța s de axa neutră Δ, expresia (1.22) a efortului unitar în acest punct devine $\sigma = ks$, sau, înlocuind pe k cu expresia dată de (1.23):

$$\sigma = \frac{N \cdot s}{S_\Delta}. \tag{1.24}$$

— Momentele volumului eforturilor unitare în raport cu axele Δ și X sînt, respectiv:

$$N\delta_\Delta = \int \sigma x dA = k \int x^2 dA = kI_\Delta,$$

$$N\delta_X = \int \sigma y dA = kI_{\Delta X},$$

în care, ținînd seama de valoarea lui k din relația (1.23), obținem:

$$\delta_\Delta = \frac{I_\Delta}{S_\Delta}, \quad \delta_X = \frac{I_{\Delta X}}{S_\Delta}, \tag{1.25}$$

unde I_Δ și $I_{\Delta X}$ sînt respectiv momentul de inerție în raport cu axa neutră Δ și momentul centrifugal în raport cu axele Δ și X. Formulele (1.24) și (1.25) rezolvă cele două probleme propuse în cazul punctului de aplicare al forței la distanță finită și dau: efortul unitar într-un punct oarecare al secțiunii și poziția punctului de aplicare al forței N.

Dacă axa X trece chiar prin punctul E, atunci $\delta_X = 0$, și din relația lui δ_X din (1.25) rezultă:

$$I_{\Delta X} = 0. \tag{1.26}$$

Această formulă exprimă proprietatea: *orice dreaptă dusă prin punctul de aplicare al unei forțe este conjugată cu axa neutră corespunzătoare acestui punct în raport cu secțiunea considerată.*

De asemenea, inversa acestei proprietăți este adevărată, și anume: *dacă o dreaptă Δ_E este conjugată, în raport cu o secțiune A, cu toate dreptele care trec printr-un punct dat E, atunci dreapta respectivă este axa neutră corespunzătoare punctului E de aplicare al forței.*

Din cele de mai sus rezultă condiția de biunivocitate că, fiind dată o secțiune, unei axe neutre Δ_E din planul ei îi corespunde un punct E de aplicare a forței și invers.

Scanned with OKEN Scanner

b) **Punctul de aplicare al forței este la infinit** (cazul încovoierii pure).

In acest caz, formulele (1.24), (1.25) stabilite mai sus nu mai au sens, deoarece $S_\Delta = 0$, $N = 0$.

Să determinăm efortul unitar într-un punct oarecare P al secțiunii solicitată de momentul M, dirijat după o direcție oarecare m (fig. 1.5).

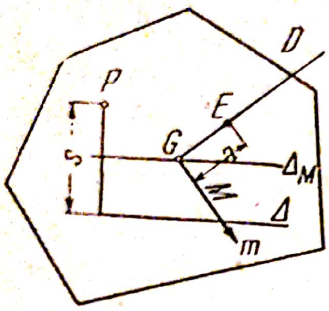

Fig. 1.5

Ducem prin centrul de greutate G al secțiunii o dreaptă D perpendiculară pe direcția vectorului moment și pe ea luăm un punct E la distanță $a = \overline{GE}$. Considerăm secțiunea solicitată în E de forța $N = \frac{M}{a}$ și admitem că se cunoaște axa neutră Δ, corespunzătoare punctului E (Δ este paralelă cu axa neutră Δ_M corespunzătoare momentului M).

Notăm cu s distanța de la P la dreapta Δ, cu σ' efortul unitar în punctul P, cînd secțiunea considerată este solicitată de forța N în E, și cu σ efortul unitar în același punct P, cînd secțiunea este solicitată de momentul M.

Cu acestea, avem solicitările:

$$\sigma' = \frac{N}{S_\Delta} s, \quad \sigma = \sigma' - \frac{N}{A},$$

de unde:

$$\sigma = \frac{N}{S_\Delta} s - \frac{N}{A}. \tag{1.27}$$

In afară de aceasta, cînd se dă axa neutră Δ_M trebuie să mai determinăm direcția în care punctul de aplicare al forței tinde către infinit.

In sistemul de referință considerat în cazul (a), direcția m_1 a punctului E de la infinit se obține făcînd raportul dintre δ_Δ și δ_X date de formulele (1.25) și avem:

$$m_1 = \frac{I_\Delta}{I_{\Delta X}}. \tag{1.28}$$

Dacă luăm dreapta X perpendiculară pe axa neutră Δ_M, formula (1.28) va avea forma $m_1 = \operatorname{tg} \varphi$, unde φ este unghiul dintre direcția corespunzătoare punctului de aplicare al forței și axa neutră, iar vectorul moment va face cu axa neutră unghiul $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Formulele (1.27) și (1.28) rezolvă cele două probleme în cazul solicitării printr-un moment.

§ 5. INVOLUȚIE. MOMENTE DE INERȚIE

A. PROIECTIVITATE. INVOLUȚIE

Proiectivitate. Avînd x, respectiv x', abscisele punctelor P și P' pe două drepte D și D', relația de transformare liniară:

$$x=\frac{\alpha_1 x'+\beta_1}{\alpha_2 x'+\beta_2} \tag{1.29}$$

cu determinantul

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

transformă dreptele liniar una în alta.

Intre punctele celor două drepte există o corespondență biunivocă, pe care o numim de proiectivitate.

Expresia (1.29) a unei proiectivități exprimă o relație biliniară în x și x', care în general se poate scrie astfel:

$$axx'+bx+cx'+d=0. \tag{1.30}$$

Două valori corespunzătoare x, x' se numesc valori omoloage iar punctele respective, puncte omoloage. Dacă dreptele D și D' se confundă, punctele $P(x)$ și $P'(x')$ sînt pe aceeași dreaptă D și între ele avem o corespondență proiectivă. O corespondență proiectivă, după cum se vede din relația (1.30), depinde de trei parametri $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$ (unde $a\neq 0$).

Rezultă că proiectivitatea este definită, atunci cînd se dau trei perechi de puncte omoloage $P_i(x_i)$, $P'_i(x'_i)$, $i=1, 2, 3$, deoarece acestea, în ecuația (1.30), determină parametrii $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$.

Totalitatea punctelor de pe o dreaptă, cînd aceste puncte se determină după o anumită lege, formează o diviziune.

In cazul de mai sus, pe cele două drepte D și D' avem cîte o diviziune de puncte între care există o corespondență proiectivă.

Pe aceeași dreaptă pot fi considerate însă două sau mai multe diviziuni de puncte.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm pe aceeași dreaptă două diviziuni de puncte $P(x)$ și $P'(x')$ între abscisele cărora există relația de proiectivitate (1.30).

Dacă luăm un punct $P_i(x_i)_{\mathrm{I}}$ (indicii romani indică clasele de diviziuni în care se găsesc punctele) din diviziunea I, din relația (1.30) rezultă omologul său $P'_i(x'_i)_{\mathrm{II}}$ din diviziunea II. Dacă însă considerăm punctul $P'_i(x'_i)_{\mathrm{I}}$, aparținînd diviziunii I, în general omologul lui în diviziunea II nu mai este $P_i(x_i)$. Aceasta se observă din relația (1.30) deoarece, dacă se schimbă x cu x', relația nu-și păstrează invarianța.

Involuție. Se dă o corespondență proiectivă între două diviziuni de puncte. Fie punctul $P_i(x_i)_{\mathrm{I}}$ din diviziunea I, care are ca omolog punctul $P'_i(x'_i)_{\mathrm{II}}$ în diviziunea II.

Corespondența proiectivă între cele două diviziuni devine involuție atunci cînd considerînd punctul $P'_i(x'_i)_{\mathrm{I}}$ în diviziunea I, omologul său în diviziunea II este punctul $P_i(x_i)_{\mathrm{II}}$.

In acest caz, relația (1.30) devine:

$$Axx'+B(x+x')+C=0, \tag{1.31}$$

care exprimă relația analitică pentru involuție.

Se vede că dacă în relația (1.31) se schimbă x cu x' aceasta rămîne invariantă, ceea ce confirmă cele spuse mai sus.

Analog, se pot considera două fascicule de drepte cu același vîrf:

$$y-y_1=m(x-x_1),\quad y-y_1=m'(x-x_1)$$

la care, în cazul cînd între coeficienții lor unghiulari avem relația:

$$Amm'+B(m+m')+C=0, \tag{1.32}$$

spunem că cele două fascicule sînt în involuție.

Fie două drepte $D_i(m_i)_{\mathrm{I}}$, $D'_i(m'_i)_{\mathrm{II}}$ omoloage, de coeficienți unghiulari m_i, m'_i, una în I și cealaltă în al II-lea fascicul; și aici dreapta $D'_i(m'_i)$ din fasciculul I, are ca omoloagă dreapta $D_i(m_i)$ în fasciculul al II-lea.

Se vede din relația (1.32), că o involuție depinde de doi parametri: $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $(A\neq 0)$, deci ea este definită dacă se dau două perechi de puncte (respectiv drepte) omoloage.

Să considerăm pe aceeași dreaptă două diviziuni de puncte $P(x)$ și $P'(x')$ între abscisele cărora există relația de proiectivitate (1.30).

Dacă luăm un punct $P_i(x_i)_I$ (indicii romani indică clasele de diviziuni în care se găsesc punctele) din diviziunea I, din relația (1.30) rezultă omologul său $P'_i(x'_i)_{II}$ din diviziunea II. Dacă însă considerăm punctul $P'_i(x'_i)_I$, aparținînd diviziunii I, în general omologul lui în diviziunea II nu mai este $P_i(x_i)$. Aceasta se observă din relația (1.30) deoarece, dacă se schimbă x cu x', relația nu-și păstrează invarianța.

Involuție. Se dă o corespondență proiectivă între două diviziuni de puncte. Fie punctul $P_i(x_i)_I$ din diviziunea I, care are ca omolog punctul $P'_i(x'_i)_{II}$ în diviziunea II.

Corespondența proiectivă între cele două diviziuni devine involuție atunci cînd considerînd punctul $P'_i(x'_i)_I$ în diviziunea I, omologul său în diviziunea II este punctul $P_i(x_i)_{II}$.

In acest caz, relația (1.30) devine:

$$Axx'+B(x+x')+C=0, \tag{1.31}$$

care exprimă relația analitică pentru involuție.

Se vede că dacă în relația (1.31) se schimbă x cu x' aceasta rămîne invariantă, ceea ce confirmă cele spuse mai sus.

Analog, se pot considera două fascicule de drepte cu același vîrf:

$$y-y_1=m(x-x_1), \quad y-y_1=m'(x-x_1)$$

la care, în cazul cînd între coeficienții lor unghiulari avem relația:

$$Amm'+B(m+m')+C=0, \tag{1.32}$$

spunem că cele două fascicule sînt în involuție.

Fie două drepte $D_i(m_i)_I$, $D'_i(m'_i)_{II}$ omoloage, de coeficienți unghiulari m_i, m'_i, una în I și cealaltă în al II-lea fascicul; și aici dreapta $D'_i(m'_i)$ din fasciculul I, are ca omoloagă dreapta $D_i(m_i)$ în fasciculul al II-lea.

Se vede din relația (1.32), că o involuție depinde de doi parametri: $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $(A\neq 0)$, deci ea este definită dacă se dau două perechi de puncte (respectiv drepte) omoloage.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul fasciculelor în involuție două drepte omoloage le vom numi și raze omoloage.

Razele duble (respectiv la diviziuni de puncte avem puncte duble) sînt acelea care corespund lor înseși și pentru a le determina vom face în (1.32) $m=m'$ [pentru puncte vom face în (1.31) $x=x'$].

Din ecuația:

$$Am^2+2Bm+C=0, \tag{1.33}$$

se obțin două perechi de raze duble (perechi cu ele înseși).

Razele duble pot fi reale distincte, confundate sau imaginare.

Dacă se unește un punct O din plan cu punctele $P(x)$, $P'(x')$ a două diviziuni în involuție, se obțin două fascicule de drepte în involuție. Invers, două fascicule de drepte în involuție determină pe o axă două diviziuni în involuție.

Indicăm în legătură cu involuția, teoremele de care ne vom folosi la construcțiile grafice pe care le vom face:

I. Pe un cerc dat C (fig. 1.6) se ia un punct O. Printr-un alt punct T în planul cercului, se duce o secantă care intersectează cercul în A și A'. Cînd secanta se rotește în jurul lui T, dreptele OA și OA' descriu două fascicule în involuție.

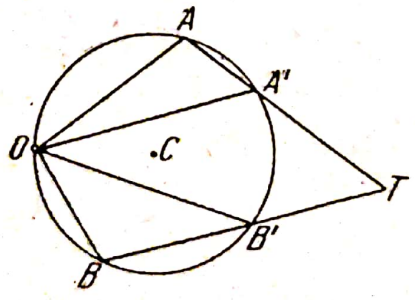

Fig. 1.6

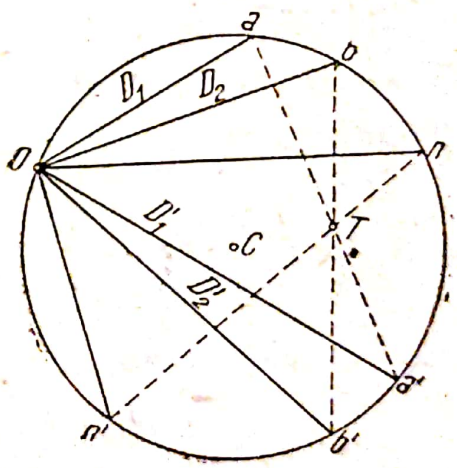

Fig. 1.7

II. Pentru a construi două fascicule în involuție, cu același vîrf O, definite de două perechi de raze omoloage (D_1, D'_1), (D_2, D'_2) se duce un cerc oarecare prin O (fig. 1.7) care se intersectează în a, b, a', b' respectiv cu razele D_1, D_2, D'_1, D'_2. T fiind punctul de intersecție dintre aa', bb', o dreaptă oarecare dusă prin T intersectează cercul în n, n'.

Dreptele On, On' formează o pereche de raze omoloage ale involuției. Astfel se pot determina grafic oricîte perechi de raze omoloage.

Punctul T se numește centru de involuție. Razele duble sînt reale distincte, confundate, sau imaginare, după cum T este exterior cercului, pe cerc sau în interiorul lui.

Perechea de raze omoloage normale una pe alta corespunde secantei dusă din T prin centrul cercului.

B. AXE CONJUGATE. DIAMETRI CONJUGAȚI

— Intr-un punct oarecare O al unei secțiuni date A vom considera un sistem de axe rectangulare xOy (fig. 1.8) și vom urmări două fascicule de drepte D, D' cu vîrful în O care au ecuațiile:

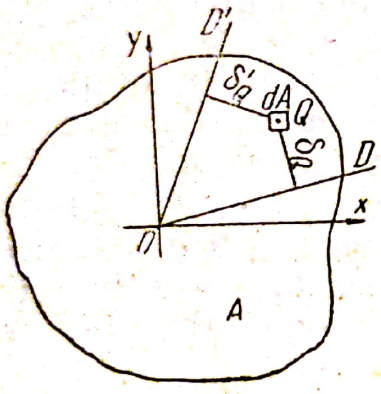

Fig. 1.8

$$D: \quad y=mx, \quad D': \quad y=m'x. \tag{1.34}$$

Q fiind un punct oarecare al secțiunii, iar δ_Q, δ'_Q, distanțele lui la dreptele D și D', se va căuta condiția pe care trebuie s-o îndeplinească dreptele D și D' pentru ca momentul centrifugal $I_{DD'}$ al secțiunii, în raport cu aceste drepte, să fie nul.

Avem:

$$I_{DD'}=\int_A \delta_Q \delta'_Q \, dA=0,$$

sau

$$\int_A \frac{(y-mx)\,(y-m'x)}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+m'^2}}\,dA=0,$$

care prin efectuare dă:

$$mm'I_y-(m+m')I_{xy}+I_x=0, \tag{1.35}$$

unde I_x, I_y sînt momentele de inerție în raport cu axele x, y și I_{xy} este momentul de inerție centrifugal.

Dacă relația (1.35) (care exprimă tocmai condiția ca $I_{DD'}=0$) este satisfăcută, fasciculele de drepte D, D' sînt în involuție.

Deci, dacă două drepte se rotesc în jurul unui punct, astfel ca momentul centrifugal al unei secțiuni în raport cu

ele să fie mereu nul, aceste drepte dau naștere la două fascicule în involuție.

In acest caz, spunem că axele D și D' *sînt conjugate în raport cu secțiunea dată* și invers, dacă axele D și D' sînt conjugate avem $I_{DD'}=0$ iar între coeficienții unghiulari ai dreptelor D și D' există relația de involuție (1.35).

Axele conjugate sînt diametrii conjugați în elipsa de inerție referitoare la punctul O al secțiunii date A. Direcțiile principale care trec prin O sînt date de ecuația (1.35) și de:

$$1+mm'=0. \tag{1.36}$$

Pentru a găsi razele duble ale fasciculelor D, D' facem $m=m'$ în (1.35); în acest caz ele sînt însă imaginare, deoarece $I_{xy}^2-I_xI_y<0$[1]). Rezultă că în cazul axelor conjugate ale secțiunilor punctul T se găsește în interiorul cercului.

C. MOMENTE DE INERȚIE

a) **Determinarea direcțiilor principale și a momentelor principale de inerție referitoare la un punct oarecare O al secțiunii, cînd se cunosc I_x, I_y, I_{xy} referitoare la un sistem de axe rectangulare xOy.**

Cunoaștem că, atunci cînd prin punctul O trec două fascicule de drepte D și D' pentru care avem $I_{DD'}=0$, fasciculele D și D' sînt în involuție. O pereche de raze omoloage ale acestei involuții sînt și direcțiile principale corespunzătoare punctului O. Involuția este însă definită prin datele problemei, deoarece ea este dată de relația (1.35) ai cărei coeficienți se cunosc. Vom folosi deci construcția dată la involuție pentru a determina întîi centrul de involuție T și apoi razele omoloage perpendiculare, care sînt tocmai direcțiile principale.

Prin punctul O ducem un cerc de rază oarecare a și, pentru a nu dezvolta calcule prea lungi, luăm centrul C al cercului pe axa Ox (fig. 1.9).

Centrul de involuție se determină astfel: luăm două perechi de raze omoloage (D_1, D_1'), (D_2, D_2') care intersectează cercul în punctele A_1, A_1', A_2, A_2'. Punctul T este la intersecția

[1]) Caz particular al inegalității lui *Buniakovski* (Ecuațiile fizicii matematice de *S. L. Sobolev*, traducere din limba rusă, Editura Tehnică, 1955, pag. 359).

dreptelor A_1A_1' și A_2A_2'. Cum poziția lui T nu depinde de perechile de raze omoloage considerate, vom lua pentru a determina pe T, dreptele (D_1, D_1') și (D_2, D_2') de coeficienți unghiulari $(m_1 = 0, m_1')$, respectiv $(m_2 = \infty, m_2')$. Valorile lui m_1', m_2' le găsim din relația (1.35), făcînd pe rînd $m = m_1 = 0$, $m = m_2 = \infty$ și rezolvînd-o în raport cu m'. Avem:

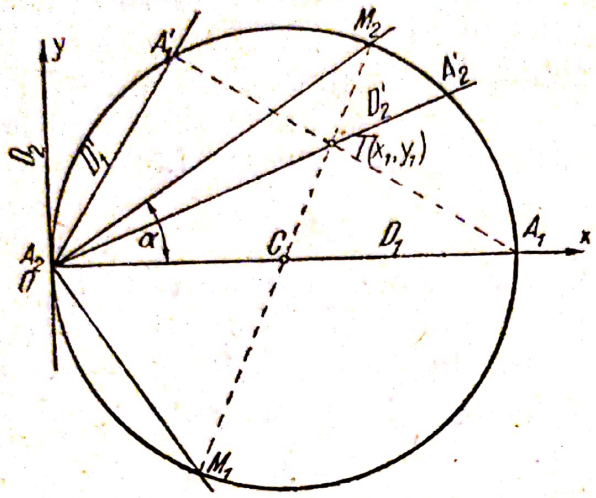

Fig. 1.9

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = 0; \quad m_1' = \dfrac{I_x}{I_{xy}} \\ \text{și} \\ m_2 = \infty; \quad m_2' = \dfrac{I_{xy}}{I_y}; \end{array}\right\} \quad (1.37)$$

iar razele omoloage au respectiv ecuațiile:

$$\left\{\begin{array}{ll} D_1: & y = 0 \\ D_1': & y = \dfrac{I_x}{I_{xy}} x \end{array}\right. \text{ și } \left\{\begin{array}{ll} D_2: & x = 0 \\ D_2': & y = \dfrac{I_{xy}}{I_y} x. \end{array}\right.$$

Ecuația cercului C este:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0, \quad (1.38)$$

iar coordonatele punctelor A_1, A_1', A_2, A_2' de intersecție cu cercul sînt

$$A_1(2a, 0), \; A_1'\left(\frac{2aI_{xy}^2}{I_x^2 + I_{xy}^2}, \; \frac{2aI_xI_{xy}}{I_x^2 + I_{xy}^2}\right),$$

$$A_2(0, 0), \; A_2'\left(\frac{2aI_y^2}{I_y^2 + I_{xy}^2}, \; \frac{2aI_yI_{xy}}{I_y^2 + I_{xy}^2}\right).$$

Ecuațiile dreptelor A_1A_1' și A_2A_2' sînt, respectiv:

$$A_1A_1': \; I_{xy}x + I_xy - 2aI_{xy} = 0; \quad A_2A_2': \; y = \frac{I_{xy}}{I_y} x.$$

Intersectînd aceste două drepte, obținem punctul T:

$$T\left(x_1 = \frac{2aI_y}{I_x + I_y}, \; y_1 = \frac{2aI_{xy}}{I_x + I_y}\right). \quad (1.39)$$

Scanned with OKEN Scanner

Punctul T, determinat prin coordonatele sale, îl reprezentăm pe fig. 1.9 și apoi găsim punctele M_1, M_2 de intersecție ale dreptei TC cu cercul C.

Direcțiile principale căutate sînt OM_1 și OM_2.

Dacă particularizăm raza cercului și luăm:

$$a=\frac{I_x+I_y}{2},$$

obținem

$$T(x_1=I_y,\ y_1=I_{xy}), \tag{1.40}$$

care duce la construcția cunoscută sub numele de cercul lui Land.

Să determinăm acum valorile momentelor principale de inerție pe care le notăm I_1, I_2. Ecuația dreptei TC este:

$$y=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x}(x-a), \tag{1.41}$$

în care avem:

$$\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x}=\operatorname{tg} 2\alpha. \tag{1.42}$$

Intersectînd cercul C, dat de ecuația (1.38), cu dreapta TC, dată de ecuația (1.41), ținînd seama și de notația (1.42), obținem coordonatele punctelor M_1, M_2:

$$x_{1,2}=a(1\pm\cos 2\alpha),\quad y_{1,2}=\pm a\sin 2\alpha. \tag{1.43}$$

Punînd

$$TM_1=V_1\quad\text{și}\quad TM_2=V_2, \tag{1.44}$$

rezultă:

$$V_{1,2}^2=\left[\frac{2aI_y}{I_x+I_y}-a(1\pm\cos 2\alpha)\right]^2+\left(\frac{2aI_{xy}}{I_x+I_y}\mp a\sin 2\alpha\right)^2.$$

Înlocuind pe $\cos 2\alpha$ și $\sin 2\alpha$ cu valorile corespunzătoare scoase din (1.42), obținem:

$$\frac{I_x+I_y}{a}V_{1,2}=I_x+I_y\pm\sqrt{(I_x-I_y)^2+4I_{xy}}. \tag{1.45}$$

Membrul al doilea dă tocmai dublul momentelor principale de inerție I_1 și I_2:

$$I_{1,2}=kV_{1,2}, \tag{1.46}$$

unde:

$$k=\frac{I_x+I_y}{2a}. \tag{1.47}$$

Astfel se determină grafic valorile momentelor principale de inerție, care sînt proporționale cu V_1, V_2, raportul de proporționalitate fiind k.

Dacă particularizăm raza cercului, luînd valoarea dată în relația (1.40) $a=\frac{I_x+I_y}{2}$, se obține $k=1$ și în acest caz $I_1=V_1$, $I_2=V_2$, deci ne aflăm în cazul construcției Land.

Toate cele de mai sus se aplică identic pentru cazul cînd punctul considerat este în centrul de greutate G al secțiunii.

b) **Determinarea momentelor de inerție față de un sistem de axe rectangulare $x'Oy'$ care trec printr-un punct oarecare O al secțiunii, cînd se cunosc I_x, I_y, I_{xy} referitor la un sistem de axe rectangulare xOy (fig. 1.10).**

Determinăm, ca și în cazul precedent, centrul de involuție T, care este dat de relația (1.39).

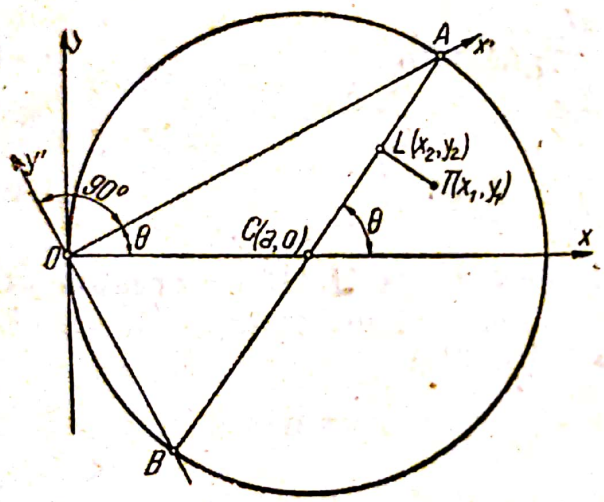

Fig. 1.10

Notăm cu A și B intersecțiile dreptelor x' și y' cu cercul C, și cu L intersecția dintre dreapta AB și normala dusă pe ea din T. Ecuațiile dreptelor AB și TL sînt:

$$\left.\begin{aligned} y&=(x-a).\operatorname{tg} 2\theta;\\ y-y_1&=-(x-x_1)\operatorname{ctg} 2\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (1.48)$$

Coordonatele punctelor A și B se obțin intersectînd dreapta AB cu cercul C dat de relația (1.38) și sînt:

$$x_{A,B}=a(1\pm\cos 2\theta),\quad y_{A,B}=\pm a\sin 2\theta. \qquad (1.49)$$

Coordonatele punctului L se obțin din rezolvarea ecuațiilor (1.48). Avem:

$$x_2=\frac{y_1+a\operatorname{tg}2\theta+x_1\operatorname{ctg}2\theta}{\operatorname{tg}2\theta+\operatorname{ctg}2\theta},\qquad y_2=\frac{x_1-a+y_1\operatorname{tg}2\theta}{\operatorname{tg}2\theta+\operatorname{ctg}2\theta}. \qquad (1.50)$$

Notăm $\overline{AL}=W_1$ și $\overline{BL}=W_2$ și calculăm valorile lui W_1, W_2, $\overline{TL}$. Avem:

$$\left.\begin{aligned} W_{1,2}^2&=[x_2-a(1\pm\cos 2\theta)]^2+(y_2\mp a\sin 2\theta)^2\\ \overline{TL}^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (1.51)$$

Scanned with OKEN Scanner

Inlocuind în (1.51) valorile lui x_1, y_1, x_2, y_2 din (1.39) şi (1.50), obţinem:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{I_x+I_y}{2a}W_1 &= I_x\cos^2\theta+I_y\sin^2\theta-I_{xy}\sin 2\theta,\\
\frac{I_x+I_y}{2a}W_1 &= I_x\sin^2\theta+I_y\cos^2\theta+I_{xy}\cos 2\theta,\\
\frac{I_x+I_y}{2a}\overline{TL} &= \frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta+I_{xy}\cos 2\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.52)$$

Expresiile din membrul al doilea sînt $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{x'y'}$ şi dacă se pune $\frac{I_x+I_y}{2a}=k$ obţinem:

$$I_{x'}=kW_1,\quad I_{y'}=kW_2,\quad I_{x'y'}=k\overline{TL}. \qquad (1.53)$$

Expresiile date de (1.53) exprimă că $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{x'y'}$ sînt proporţionale cu $W_1=\overline{AL}$, $W_2=\overline{BL}$ şi cu $\overline{TL}$, raportul de proporţionalitate fiind k.

Dacă se ia $k=1$, adică $a=\frac{I_x+I_y}{2}$, obţinem:

$$I_{x'}=W_1;\quad I_{y'}=W_2,\quad I_{x'y'}=\overline{TL}, \qquad (1.54)$$

care este cazul construcţiei Land.

§ 6. FIGURI RECIPROCE

A. TRANSFORMĂRI PRIN POLARE RECIPROCE. DEFINIŢIA FIGURILOR RECIPROCE. PROPRIETĂŢI

Vom expune întîi pe scurt transformările prin polare reciproce şi după aceea vom arăta legătura dintre acestea şi problemele care vor fi studiate în cele ce vor urma.

Dacă într-un plan se ia o conică C, unui punct oarecare Q al planului îi corespunde în raport cu această conică o polară D. Invers, unei drepte oarecare a planului, îi corespunde în raport cu conica un pol. Spunem că punctul Q a fost transformat în dreapta D şi invers.

Oricărei figuri F compusă din puncte şi drepte, transformată în modul indicat în raport cu conica considerată, îi va corespunde o figură F' compusă din drepte şi puncte, şi invers.

Scanned with OKEN Scanner

Figurile F și F' se numesc figuri polare reciproce, iar conica C, în raport cu care se face transformarea, se numește conică directoare. Noi vom numi figurile F și F', pe scurt, figuri reciproce.

Din proprietățile polilor și polarelor, deducem următoarele consecințe pentru figurile reciproce:

Dacă dreptei D din figura F, îi corespunde punctul Q în figura F', atunci oricărui punct al figurii F situat pe dreapta D, îi va corespunde în figura F' o dreaptă care trece prin Q. Invers, oricărei drepte care trece prin Q în figura F', îi corespunde un punct în figura F, care este situat pe dreapta D.

De aici apare evident proprietatea: dacă punctelor Q_1 și Q_2 din figura F, le corespund respectiv dreptele D_1 și D_2 în figura F', atunci dreptei Q_1Q_2 din figura F, îi corespunde în figura F' punctul de intersecție al dreptelor D_1 și D_2.

Considerăm acum o secțiune plană oarecare A. In acest caz, putem considera drept conică directoare chiar elipsa centrală de inerție. Ecuația elipsei centrale de inerție este:

$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1, \tag{1.55}$$

unde i_x și i_y sînt razele principale de giratie.

Cînd secțiunea este solicitată într-un punct $E(u, v)$ de o forță normală, ecuația axei neutre este dată de relația (1.21), care se poate scrie sub forma:

$$\frac{(-u)\,x}{i_y^2} + \frac{(-v)\,y}{i_x^2} - 1 = 0. \tag{1.56}$$

Insă din această formă a ecuației este evident că axa neutră corespunzătoare punctului $E(u, v)$ de aplicare al forței este polara în raport cu elipsa centrală de inerție a punctului $E_1(-u, -v)$, simetricul lui E în raport cu originea (centrul de greutate G al secțiunii).

Se mai poate spune că axa neutră corespunzătoare punctului $E(u, v)$ este simetrica față de G, a polarei punctului $E(u, v)$ luată în raport cu elipsa centrală de inerție.

Dreapta simetrică față de G a polarei unui punct se mai numește și antipolara acelui punct, deci se poate spune că axa neutră Δ a punctului E este antipolara lui E în raport cu elipsa centrală de inerție și invers, punctul de aplicare al

Scanned with OKEN Scanner

forței corespunzător axei neutre Δ este antipolul dreptei Δ (simetricul în raport cu G al polului dreptei Δ).

De aici rezultă că punctul de aplicare al forței și axa neutră se bucură de aceleași proprietăți ca polul și polara. Este natural deci să introducem în legătură cu acestea noțiunea de figuri reciproce.

Oricărei figuri Φ din planul unei secțiuni A putem face să-i corespundă o figură Φ', astfel ca punctelor Q_i din figura Φ să le corespundă dreptele Δ în figura Φ', aceste drepte fiind axele neutre în secțiunea A a punctelor Q_i corespunzătoare.

De asemenea, oricărei drepte D_i, aparținînd figurii Φ, putem face să-i corespundă cîte un punct P_i aparținînd figurii Φ', astfel ca fiecare dreaptă D_i să fie axa neutră în secțiunea A, a fiecărui punct P_i.

Se mai poate spune că Φ și Φ' sînt figuri transformate prin antipolare reciproce în raport cu elipsa centrală de inerție a secțiunii A.

In cele ce urmează, vom nota cu $(\Phi; \Phi')$ sau $(\Phi'; \Phi)$ figurile Φ și Φ' care îndeplinesc condițiile de mai sus și le vom numi de asemenea figuri reciproce.

Cînd se dă secțiunea se poate găsi elipsa de inerție corespunzătoare, însă în general ea se determină dificil.

Din această cauză, în construcțiile grafice nu vom utiliza elipsa de inerție, ci vom determina figurile reciproce servindu-ne de secțiune. Vom zice atunci că Φ și Φ' sînt figuri reciproce, în raport cu secțiunea dată A. Astfel, unui punct B_1 al figurii Φ îi corespunde o dreaptă Δ_1 în figura Φ', de unde rezultă că punctul B_1 și dreapta Δ_1 sînt figuri reciproce în raport cu A și scriem aceasta simbolic sub formele: $(B_1; \text{dr}\,\Delta_1)$ sau $(\text{dr}\,\Delta_1; B_1)$. Se vede că axa neutră Δ_1 și punctul corespunzător de aplicare al forței sînt cele mai simple figuri reciproce în raport cu o secțiune.

Dacă în figura Φ considerăm punctele B_1, B_2, B_3, acestora le corespund în figura Φ' dreptele Δ_1, Δ_2, Δ_3.

In acest caz, scriem simbolic $(B_1; \text{dr}\,\Delta_1)$, $(B_2; \text{dr}\,\Delta_2)$, $(B_3; \text{dr}\,\Delta_3)$ sau $(B_1, B_2, B_3; \text{dr}\,\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ ceea ce înseamnă că figurile: (B_1, B_2, B_3); $(\text{dr}\,\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ sînt figuri reciproce, punctele B_1, B_2, B_3 fiind puncte de aplicare ale forței, corespunzătoare axelor neutre Δ_1, Δ_2, Δ_3 respective.

Reamintim proprietățile referitoare la punctul E de aplicare al forței și la axa neutră corespunzătoare:

Scanned with OKEN Scanner

— Cînd punctul E se mișcă în planul secțiunii pe o dreaptă D, axa neutră Δ se rotește în jurul unui punct B, care este tocmai punctul de aplicare al forței corespunzător axei neutre D și invers.

— Cînd punctul E coincide cu centrul de greutate G al secțiunii, axa neutră Δ este dreapta de la infinit.

Acesta este cazul compresiunii centrice.

— Dacă punctul E se mișcă pe dreapta de la infinit, axa neutră Δ se rotește în jurul centrului de greutate G al secțiunii.

— Cînd axa neutră Δ se deplasează paralel cu o direcție m, punctul E de aplicare al forței se mișcă pe o dreaptă D care trece prin centrul de greutate al secțiunii, D fiind chiar axa neutră corespunzătoare punctului de la infinit, dat de direcția m. Invers, dacă E se mișcă pe o dreaptă D care trece prin centrul de greutate G al secțiunii, axa neutră Δ se deplasează paralel cu direcția corespunzătoare punctului de la infinit, care are pe D ca axă neutră.

Din cele de mai sus rezultă următoarele: centrul de greutate G al unei secțiuni are ca reciprocă dreapta z de la infinit, ceea ce se scrie simbolic $(G;\ \mathrm{dr}\, z)$; o dreaptă Γ, care trece prin G are ca reciproc un punct de pe dreapta de la infinit, definit prin direcția m, și se notează $(\mathrm{dr}\, \Gamma;\ \mathrm{dir}\, m)$ etc.

B. FIGURI RECIPROCE ÎN INVOLUȚIE

— Dacă prin centrul de greutate al unei secțiuni, considerăm două fascicule de drepte Δ_i și D_i, astfel ca direcțiile dreptelor D_i să fie chiar reciprocele dreptelor Δ_i, atunci fasciculele sînt în involuție.

In baza formulei (1.26) avem $I_{\Delta_i D_i}=0$, iar din formula (1.35) rezultă că fasciculele Δ_i și D_i sînt în involuție.

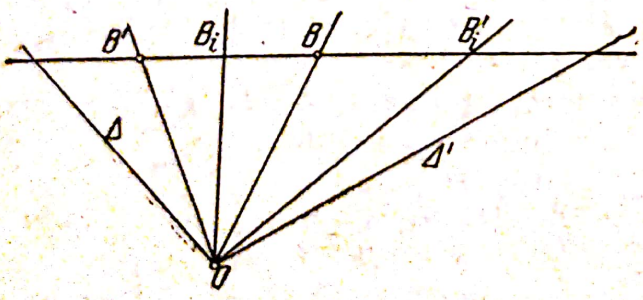

Fig. 1.11

— Fiind date două drepte Δ și Δ' și punctele reciproce ale lor, B și B' (fig. 1.11), se știe că unui punct B_i de pe dreapta BB' îi corespunde o dreaptă reciprocă OB_i', care trece prin intersecția O a drep-

telor Δ, Δ'. Invers, punctului B'_i, de intersecție a dreptei OB'_i cu BB', îi corespunde dreapta reciprocă OB_i.

Să demonstrăm că fasciculele de drepte OB_i, OB'_i sînt în involuție.

Dreptele OB_i, OB'_i, trecînd fiecare prin reciprocul celeilalte, din relația (1.26) rezultă: $I_{OB_i,\ OB'_i}=0$, care arată că cele două fascicule OB_i și OB'_i sînt în involuție.

C. APLICAREA FIGURILOR RECIPROCE LA DETERMINAREA MOMENTELOR DE INERȚIE

a) **Determinarea direcțiilor principale cînd se dau două drepte Δ și Δ' care trec prin centrul de greutate G și direcțiile reciproce m, m' ale acestora.**

Se scrie (dr Δ, Δ'; dir m, m'). Construcția este dată în fig. 1.12. In baza celor arătate în acest paragraf la punctul Δ, Δ' și D, D' de direcții m și m' duse prin G, determină două fascicule în involuție în care direcțiile principale sînt raze omoloage perpendiculare. Prin G se duce un cerc oarecare C care determină punctele A, A', a, a' ca intersecții ale dreptelor Δ, Δ', D, D' cu cercul. Centrul de involuție T, este la intersecția dreptei Aa cu $A'a'$. Dreapta CT intersectează cercul în punctele M_1, M_2, iar GM_1, GM_2 sînt direcțiile principale centrale.

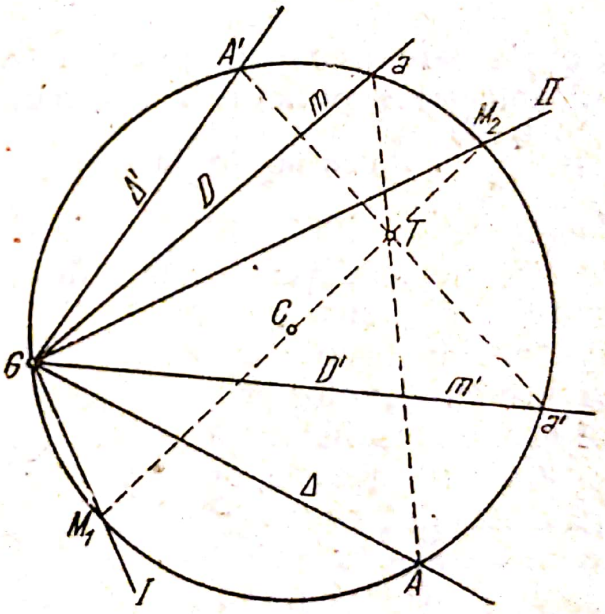

Fig. 1.12

b) **Determinarea direcțiilor principale cînd se dau două drepte Δ, Δ' oarecare și punctele reciproce B, B'.**

— Putem determina direcțiile principale care trec prin centrul de greutate, luînd paralelele Δ_1, Δ'_1 duse prin G la Δ, respectiv la Δ'; considerînd (dr Δ_1, dir GB) și (dr Δ'_1 dir GB') ne aflăm în cazul deja studiat.

Scanned with OKEN Scanner

— Putem însă determina (fig. 1.13) direcțiile principale referitoare la punctul Q de intersecție dintre Δ și Δ'. Procedeul este asemănător cazurilor studiate.

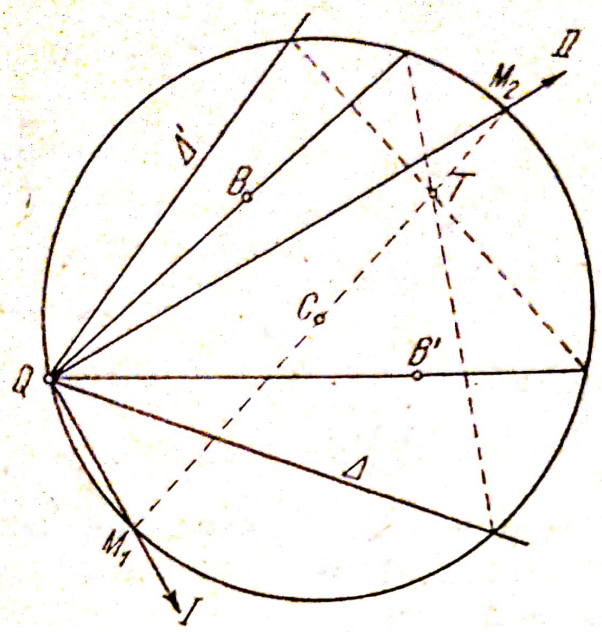

Fig. 1.13

c) Determinarea momentului de inerție și a momentului centrifugal cînd se dau două drepte Δ și Δ' și punctele lor reciproce B și B'.

Am văzut la § 5 punctul C că putem determina momentele de inerție față de un sistem de axe ortogonale $x'Oy'$, dacă se dau I_x, I_y, I_{xy}, referitor la un alt sistem de axe ortogonale care trec prin punctul O. In acest caz, era nevoie să se determine punctul T (centrul de involuție) și coeficientul $k=\frac{I_x+I_y}{2a}$. Aceasta se face fără dificultate, cînd se cunosc I_x, I_y, I_{xy}.

Să considerăm date (dr Δ, Δ'; B, B'). Cu procedeul indicat mai sus găsim centrul de involuție T și direcțiile axelor principale. Determinăm apoi pe k. Pentru aceasta, după ce am determinat direcțiile axelor principale Gx, Gy (fig. 1.14) considerăm o forță N aplicată în punctul $B(u, v)$ căruia îi corespunde axa neutră Δ. Notînd cu I_1, I_2 momentele principale de inerție, efortul unitar într-un punct (x, y) al secțiunii (deoarece axele de referință sînt axele principale) este

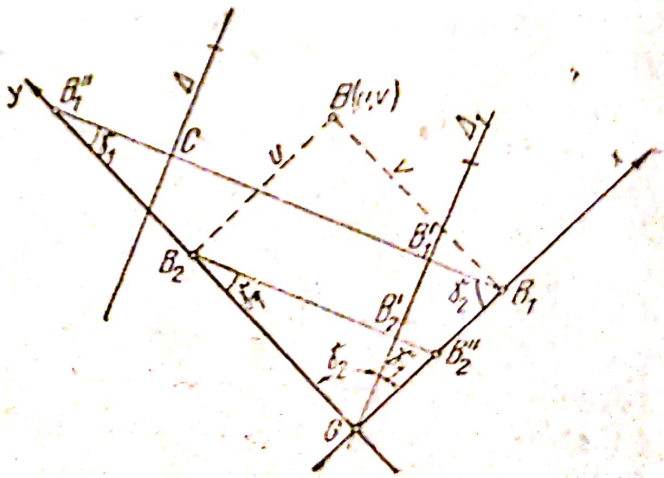

Fig. 1.14

$$\sigma=\frac{N}{A}+\frac{Nvy}{I_1}+\frac{Nux}{I_2}.$$

Ducem apoi prin G o paralelă Δ_1 la Δ, iar din B_1 și B_2, picioarele perpendicularelor coborîte din B pe axe, ducem dreptele B_1B_1'' și B_2B_2'' perpendiculare pe Δ_1. Pentru punctul $B_1(u, o)$ avem:

$$\sigma_{B_1} = \frac{N}{A} + \frac{Nu^2}{I_2}.$$

Efortul unitar în punctul B_1 este însă dat și de relația:

$$\sigma_{B_1} = \frac{N}{S_\Delta}\overline{B_1C} = \frac{N}{A\cdot\overline{CB_1'}}(\overline{CB_1'}+\overline{B_1'B_1}) = \frac{N}{A} + \frac{N}{S_\Delta}\overline{B_1'B_1}.$$

Din egalarea celor două expresii ale lui σ_{B_1}, obținem:

$$I_2 = \frac{u^2 S_\Delta}{\overline{B_1'B_1}}$$

și în mod analog, găsim:

$$I_1 = \frac{v^2 S_\Delta}{\overline{B_2'B_2}};$$

cum $\overline{B_1'B_1} = u\sin\gamma_1$ și $\overline{B_2'B_2} = v\sin\gamma_2$, avem:

$$I_x + I_y = I_1 + I_2 = S_\Delta\left(\frac{u}{\sin\gamma_1} + \frac{v}{\sin\gamma_2}\right)$$

și cu:

$$\overline{B_1B_1''} = \frac{u}{\sin\gamma_1};\quad \overline{B_2B_2''} = \frac{v}{\sin\gamma_2},$$

rezultă:

$$I_x + I_y = S_\Delta(\overline{B_1B_1''} + \overline{B_2B_2''}). \tag{1.57}$$

Dacă alegem diametrul cercului $2a = S_\Delta$ (exprimat în unități de lungime), valoarea lui k va fi:

$$k = \overline{B_1B_1''} + \overline{B_2B_2''}. \tag{1.58}$$

Putem însă lua arbitrar pe a, raza cercului, și atunci avem:

$$k = \frac{S_\Delta(\overline{B_1B_1''} + \overline{B_2B_2''})}{2a}, \tag{1.59}$$

iar cu formulele (1.46) și (1.53), folosind valoarea lui k determinată aici, putem afla momentele de inerție sau centrifugale referitoare la orice punct al secțiunii.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

ELEMENTE GEOMETRICE NECESARE CALCULULUI SECȚIUNILOR

§ 1. PRINCIPII DE CALCUL

In capitolul precedent am definit noțiunea de figuri reciproce în raport cu o secțiune dată precum și proprietățile acestor figuri, care vor servi în calculul secțiunilor solicitate excentric.

Intrucît eforturile unitare, atunci cînd se cunoaște axa neutră, pot fi calculate ușor cu formulele (1.24) și (1.27), problema calculului secțiunilor se reduce la aflarea axei neutre. Cum această problemă va fi larg studiată în capitolul următor, vom expune aici principial modul ei de rezolvare.

Fie A o secțiune acționată în E de o forță N; ne propunem să găsim axa neutră corespunzătoare lui E. Pentru aceasta ducem prin E două drepte oarecare Δ_1 și Δ_2 (fig. 2.1) cărora presupunem că le cunoaștem punctele reciproce E_1 și E_2. Din proprietățile figurilor reciproce rezultă: $(E;\ \text{dr}\ E_1E_2)$, adică dreapta E_1E_2 este axa neutră corespunzătoare lui E.

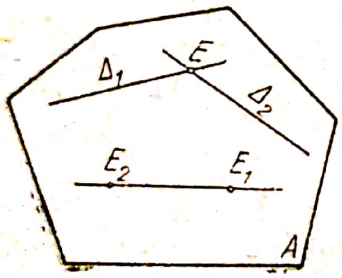

Fig. 2.1

Vom vedea în cap. III, că nu este nevoie ca cele două drepte Δ_1, Δ_2 să treacă prin punctul E, ele putînd fi luate oricum în planul figurii.

Rezultă atunci, că pentru calculul eforturilor unitare într-o secțiune solicitată excentric este necesar să cunoaștem figuri reciproce în raport cu această secțiune, a căror determinare formează obiectul acestui capitol.

Vom începe prin determinarea figurilor reciproce ale secțiunilor simple ca: triunghi, paralelogram, trapez, patrulater oarecare, deoarece acestea se întîlnesc destul de des în tehnică, iar secțiunile poligonale mai complicate pot fi descompuse în figuri simple.

Acolo unde credem că este necesar, vom arăta pentru aceeași problemă mai multe metode de rezolvare, aceasta pentru a permite utilizarea, în fiecare caz practic, a metodei corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. SECȚIUNEA TRIUNGHIULARĂ

A. METODE ANALITICE

Fiind dat triunghiul ABC și o dreaptă Δ în planul său, să găsim punctul reciproc E al dreptei Δ în raport cu ABC, vom avea:

1. In coordonate trilatere

In toate cazurile vom nota cu s_A, s_B, s_C distanțele de la vîrfurile triunghiului la axa neutră, distanțe care sînt proporționale cu eforturile unitare în vîrfurile respective. Cu s vom nota distanța de la un punct al secțiunii la axa neutră, iar cu a, b, c, h_a, h_b, h_c, A, laturile, înălțimile și aria triunghiului.

a) **Triunghi isoscel.** Luăm axele principale centrale xGy (fig. 2.2) ca axe de referință. Fie $E(u, v)$ punctul de aplicare al forței, iar I_x și I_y momentele de inerție în raport cu axele. După cele arătate la capitolul precedent § 2, c, efortul unitar σ are expresia

$$\frac{N}{A} + \frac{Nvy}{I_x} + \frac{Nux}{I_y} = \sigma;$$

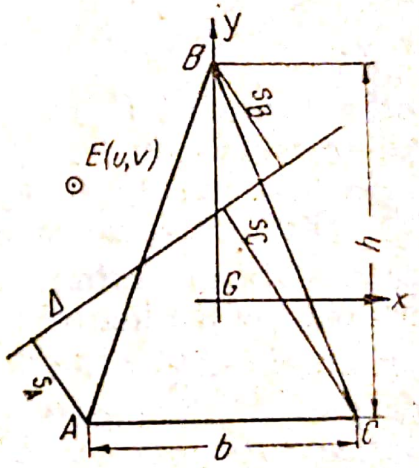

Fig. 2.2

înlocuind: $A = \frac{bh}{2}$, $I_x = \frac{1}{36} bh^3$, $I_y = \frac{1}{48} b^3 h$, obținem pentru cazul acesta:

$$1 + \frac{18\,vy}{h^2} + \frac{24\,ux}{b^2} = ks. \qquad (2.1)$$

Scriind relația (2.1) pentru cele trei vîrfuri ale triunghiului, avem:

$$1 + \frac{12v}{h} = ks_B, \quad 1 - \frac{6v}{h} + \frac{12u}{b} = ks_C, \quad 1 - \frac{6v}{h} - \frac{12u}{b} = ks_A$$

de unde se obțin în cele din urmă coordonatele punctului E:

$$u = \frac{s_C - s_A}{s_A + s_B + s_C} \cdot \frac{b}{8}; \quad v = \frac{2s_B - s_A - s_C}{s_A + s_B + s_C} \cdot \frac{h}{12}. \qquad (2.2)$$

Scanned with OKEN Scanner

b) **Triunghi oarecare.** In acest caz, vom determina poziția punctului E prin distanțele lui la laturile triunghiului.

In triunghiul oarecare ABC (fig. 2.3) ducem înălțimea BF;

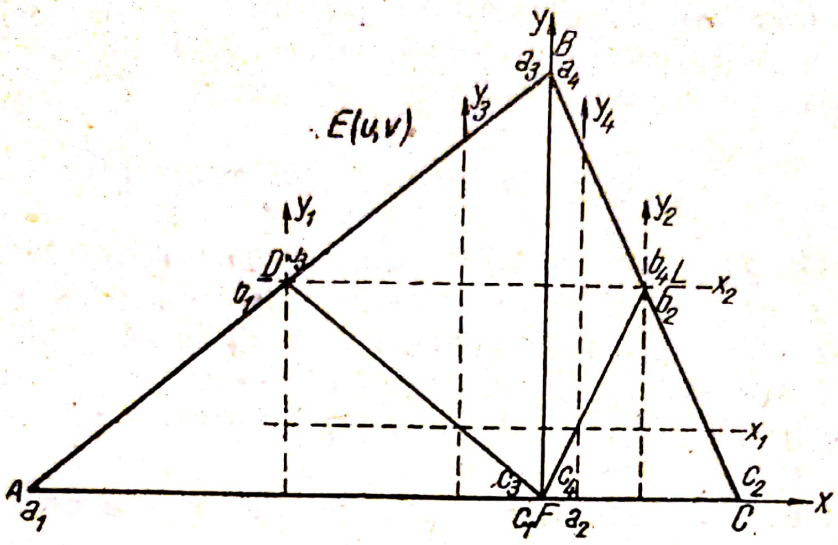

Fig. 2.3

unind punctul F cu mijloacele laturilor opuse, se formează patru triunghiuri isoscele; ADF, FLC, BDF și BLF pe care le notăm cu: $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$, $a_4b_4c_4$.

Distanța δ_b de la punctul E la latura AC a triunghiului se calculează astfel: considerăm dreapta Δ ca fiind axă neutră pentru fiecare triunghi component $a_ib_ic_i$ și găsim cu formulele (2.2) distanțele la AC ale punctelor E_i, reciprocele dreptei Δ în raport cu fiecare triunghi. Considerăm apoi aplicate în punctele E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) mărimi egale cu momentele statice ale triunghiurilor componente $a_ib_ic_i$ în raport cu axa neutră Δ, iar în E o mărime egală cu momentul static al triunghiului ABC în raport cu Δ și aplicînd teorema lui Varignon, referitor la momentele în raport cu axa x, obținem o relație din care scoatem distanța δ_b căutată. Notăm cu v_i distanțele de la E_i la axa x.

Aplicînd formula (2.2) la triunghiul ADF $(a_1b_1c_1)$, obținem:

$$v_1 = \frac{2s_{b_1} - s_{a_1} - s_{c_1}}{s_{a_1} + s_{b_1} + s_{c_1}} \cdot \frac{h_b}{24} + \frac{h_b}{6} = \frac{s_{a_1} + 2s_{b_1} + s_{c_1}}{s_{a_1} + s_{b_1} + s_{c_1}} \cdot \frac{h_b}{8}.$$

Urmărind triunghiul FLC $(a_2b_2c_2)$ se găsește în același fel:

$$v_2 = \frac{s_{a_2} + 2s_{b_2} + s_{c_2}}{s_{a_2} + s_{b_2} + s_{c_2}} \cdot \frac{h_b}{8}.$$

Din triunghiul BDF $(a_3b_3c_3)$ obținem, aplicînd prima formulă (2.2):

$$v_3 = \frac{s_{a_3} - s_{c_3}}{s_{a_3} + s_{b_3} + s_{c_3}} \cdot \frac{h_b}{8} + \frac{h_b}{2} = \frac{5s_{a_3} + 4s_{b_3} + 3s_{c_3}}{s_{a_3} + s_{b_3} + s_{c_3}} \cdot \frac{h_b}{8};$$

iar pentru triunghiul BLF $(a_4b_4c_4)$:

$$v_4 = \frac{5s_{a_4} + 4s_{b_4} + 3s_{c_4}}{s_{a_4} + s_{b_4} + s_{c_4}} \cdot \frac{h_b}{8}.$$

Momentul static al triunghiului general $a_ib_ic_i$ în raport cu axa Δ, cînd suprafața triunghiului se notează cu A_i, este:

$$S_{i\Delta} = \frac{s_{a_i} + s_{b_i} + s_{c_i}}{3} \cdot A_i. \tag{2.3}$$

Aplicînd teorema lui Varignon, așa cum am arătat mai sus, în raport cu x, avem:

$$\sum_{i=1}^{4} S_{i\Delta} v_i = S_\Delta \delta_b,$$

și înlocuind valorile lui $S_{i\Delta}$, v_i și S_Δ obținem:

$$(s_{a_1} + 2s_{b_1} + s_{c_1}) \frac{\overline{AF} \cdot h_b^2}{96} + (s_{a_2} + 2s_{b_2} + s_{c_2}) \frac{\overline{FC} \cdot h_b^2}{96} +$$

$$+ (5s_{a_3} + 4s_{b_3} + 3s_{c_3}) \frac{\overline{AF} \cdot h_b^2}{96} + (5s_{a_4} + 4s_{b_4} + 3s_{c_4}) \frac{FC \cdot h_b^2}{96} =$$

$$= \frac{s_A + s_B + s_C}{6} \cdot bh_b \cdot \delta_b.$$

Ținînd seamă că:

$$s_{a_1} = s_A; \quad s_{b_1} = s_{b_3} = \frac{s_A + s_B}{2}; \quad s_{a_3} = s_{a_4} = s_B; \quad s_{b_2} = s_{b_4} = \frac{s_B + s_C}{2};$$

$$s_{c_2} = s_C; \quad s_{c_3} = s_{c_1} = s_{c_4} = \frac{\overline{AF} \cdot s_C + \overline{FC} \cdot s_A}{b} = s_F,$$

avem:

$$\frac{\overline{AF} \cdot h_b^2}{4} (2s_B + s_A + s_F) + \frac{\overline{FC} \cdot h_b^2}{4} (2s_B + s_C + s_F) = (s_A + s_B + s_C) bh_b \cdot \delta_b.$$

De aici se calculează δ_b, de la care prin permutări circulare găsim pe δ_a și δ_c.

$$\left.\begin{aligned} \delta_a &= \left(1 + \frac{s_A}{s_A+s_B+s_C}\right)\frac{h_a}{4} \\ \delta_b &= \left(1 + \frac{s_B}{s_A+s_B+s_C}\right)\frac{h_b}{4} \\ \delta_c &= \left(1 + \frac{s_C}{s_A+s_B+s_C}\right)\frac{h_c}{4}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Pentru a determina punctul E, este suficient să considerăm numai două dintre formulele (2.4), cealaltă putînd servi ca verificare.

Valorile distanțelor δ_i trebuie măsurate de la latura respectivă a_i înspre interiorul triunghiului dacă sînt pozitive și înspre exteriorul său, dacă sînt negative.

Pe baza celor de mai sus, pentru un triunghi, se poate enunța următoarea proprietate:

„Dacă se dă o dreaptă oarecare Δ în planul triunghiului, și dacă s_A, s_B, s_C, reprezintă distanțele de la vîrfurile A, B, C la dreapta Δ, atunci: *paralelele duse la laturile triunghiului, respectiv la distanțele* δ_a, δ_b, δ_c, *sînt concurente într-un punct* E, *iar orice dreaptă* D *care trece prin punctul* E *este conjugată cu dreapta* Δ, *în raport cu triunghiul considerat*".

2. In coordonate carteziene

Se dă o secțiune triunghiulară ABC (fig. 2.4) și un sistem de axe rectangulare xOy, în care vîrfurile triunghiului (A, B și C) sînt date prin coordonatele lor. Vom considera axa Oy ca axă neutră, căreia îi corespunde punctul de aplicare al forței $E(x_y, y_y)$ și vom determina coordonatele lui E.

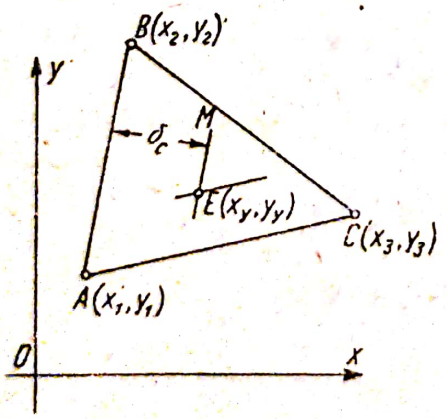

Fig. 2.4

Pentru aceasta vom folosi formulele (2.4).

Avînd $s_A = x_1$, $s_B = x_2$, $s_C = x_3$, din formulele (2.4) rezultă:

$$\delta_b = \left(1 + \frac{x_2}{\sum x_i}\right)\frac{h_b}{4}, \quad \delta_c = \left(1 + \frac{x_3}{\sum x_i}\right)\frac{h_c}{4} \qquad (2.5)$$

cu $i = 1, 2, 3$.

Notînd

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = D$$

ecuațiile dreptelor AB și AC sînt:

$$AB;\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\quad AC;\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

iar $h_b = -\frac{D}{b}$, $h_c = \frac{D}{c}$.

Punctul E este determinat de intersecția dreptelor EM și EN, duse respectiv la distanțele δ_c, δ_b de AB și AC.

Dreptele EM și EN au ecuațiile:

$$\left.\begin{aligned} EM:&\ x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)=\alpha+\delta_c c \\ EN:&\ x(y_1-y_3)+y(x_3-x_1)=\beta+\delta_b b, \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

unde

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},\quad \beta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Coordonatele x_y, y_y ale punctului E se obțin rezolvînd sistemul (2.6), după ce am introdus în acesta valorile lui δ_c și δ_b din (2.5).

Avem:

$$x_y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & x_2-x_1 \\ \beta & x_3-x_1 \end{vmatrix} + \frac{D}{4}\begin{vmatrix} 1 & x_2-x_1 \\ 1 & x_3-x_1 \end{vmatrix} + \frac{D}{4\sum x_i}\begin{vmatrix} x_3 & x_2-x_1 \\ -x_2 & x_3-x_1 \end{vmatrix}}{D}$$

$$y_y = \frac{\begin{vmatrix} y_1-y_2 & \alpha \\ y_1-y_3 & \beta \end{vmatrix} + \frac{D}{4}\begin{vmatrix} y_1-y_2 & 1 \\ y_1-y_3 & -1 \end{vmatrix} + \frac{D}{4\sum x_i}\begin{vmatrix} y_1-y_2 & x_3 \\ y_1-y_3 & -x_2 \end{vmatrix}}{D}$$

și obținem:

$$x_y = \frac{\sum x_i}{2} - \frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{2\sum x_i};\quad y_y = \frac{\sum y_i}{4} + \frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{4\sum x_i}. \qquad (2.7)$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd Ox ca axă neutră, coordonatele x_x, y_x ale punctului F de aplicare al forței sînt:

$$x_x = \frac{\sum x_i}{4} + \frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{4\sum y_i}, \quad y_x = \frac{\sum y_i}{2} - \frac{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3}{2\sum y_i}. \quad (2.8)$$

Dacă presupunem că axa neutră este Oy, și trece prin centrul de greutate al triunghiului, punctul de aplicare al forței este pe dreapta de la infinit, deoarece $x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = 0$, iar pentru găsirea direcției respective, facem limita raportului $\frac{y_y}{x_y}$, unde x_y, y_y sînt date de relația (2.7). Avem astfel:

$$m = \lim_{\Sigma x_i \to 0} \frac{y_y}{x_y} = \lim_{\Sigma x_i \to 0} \frac{\sum x_i \sum y_i + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{2\left[\left(\sum x_i\right)^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3\right]}$$

$$m = -\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}. \quad (2.9a)$$

Toate formulele de mai sus devin mult mai simple, dacă se ia ca origine un vîrf al triunghiului, de exemplu $A(x_1 = y_1 = 0)$.

Formula (2.9), ținînd seama că $x_2 + x_3 = 0$, devine în acest caz:

$$m = \frac{1}{2}(m_2 + m_3), \quad (2.9b)$$

în care m_2 și m_3 sînt coeficienții unghiulari ai dreptelor AB și AC iar m dă direcția conjugată a medianei respective.

B. METODE GRAFICE

Vom arăta cum se determină pe cale grafică diferite figuri reciproce în raport cu un triunghi oarecare.

a) **Punctul reciproc al unei laturi a triunghiului** (aplicare la determinarea simburelui central). Dacă Δ se confundă cu a, avem; $\delta_a = \frac{h_A}{2}$, $\delta_b = \frac{h_B}{4}$, $\delta_c = \frac{h_C}{4}$. Rezultă că reciprocul A' al laturii a se găsește la mijlocul medianei $\overline{AA_1}$ (fig. 2.5). Ducînd dreptele Δ_A, Δ_B, Δ_C paralele la laturile a, b, c și respectiv la distanțele $\frac{h_A}{4}$, $\frac{h_B}{4}$, $\frac{h_C}{4}$ de ele, care se intersectează în A', B', C', se vede că avem (dr a; A'), (dr b; B'), (dr c; C'). Punctele

A', B', C' sînt situate pe mijloacele medianelor respective, iar triunghiul $A'B'C'$ este simburele central al triunghiului ABC.

De asemenea, avem: (dr Δ_A; A), (dr Δ_B; B), (dr Δ_C; C).

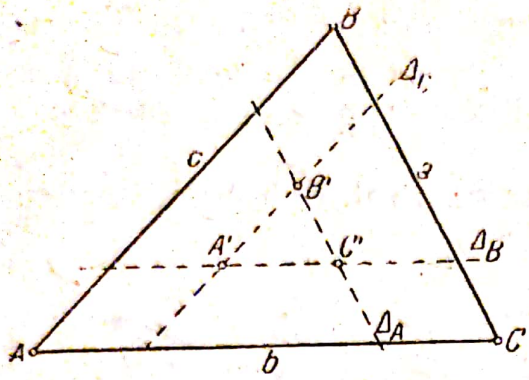

Fig. 2.5

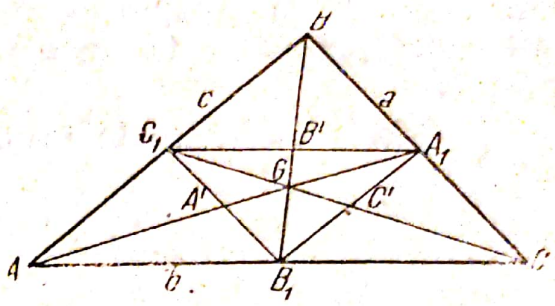

Fig. 2.6

b) **Punctul reciproc al dreptei care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi.**

Considerăm dreapta C_1A_1 (fig. 2.6) care se obține unind mijloacele laturilor c și a. Descompunînd triunghiul prin drepte paralele cu C_1A_1 într-o infinitate de fîșii elementare dA, eforturile de pe aceste fîșii au rezultantele dR la mijloacele lor, pe mediana BB_1. Rezultă că reciprocul dreptei C_1A_1 este pe mediana BB_1, însă cum avem (dr b; B'), el se află și pe latura b, deci este punctul B_1.

Vom avea astfel (dr C_1A_1; B_1), (dr A_1B_1; C_1), (dr C_1B_1; A_1).

c) **Punctul reciproc al unei drepte oarecare dusă prin vîrful triunghiului.**

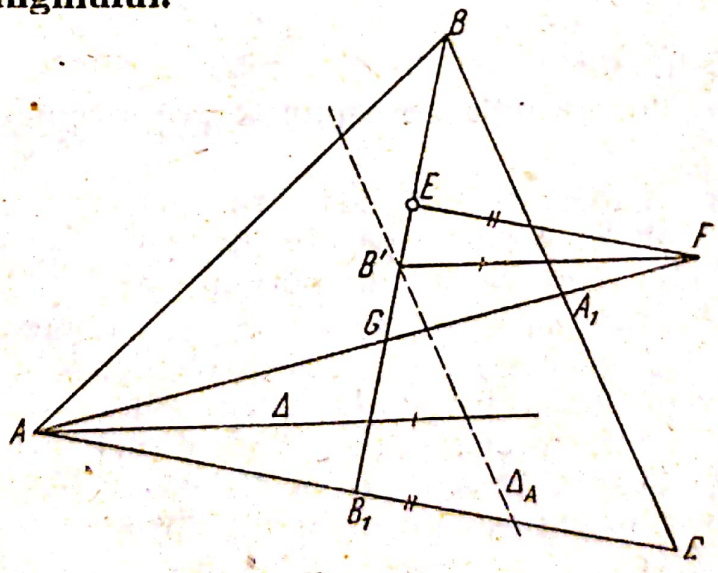

Fig. 2.7

Metoda I. Să determinăm reciprocul dreptei Δ, dusă prin vîrful triunghiului (fig. 2.7).

Acesta se găsește pe dreapta Δ_A, reciproca vîrfului A. Indicăm o construcție pe care o vom justifica în cap. III, § 4.

Din A și B ducem medianele AA_1, BB_1. Mediana BB_1 intersectează dreapta Δ_A în B' (mijlocul lui BB_1). Paralela $B'F$ dusă prin B' la dreapta Δ intersectează pe AA_1 în F, iar paralela dusă prin F la latura b întîlnește pe Δ_A în punctul E căutat.

Metoda a II-a (prin involuție). Prelungim (fig. 2.8) latu-

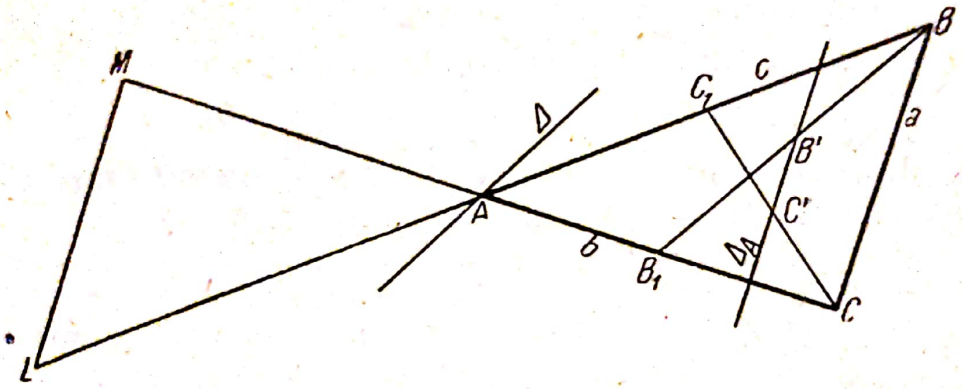

Fig. 2.8

rile AB, AC respectiv cu $\overline{AL}=\overline{AB}$ și $\overline{AM}=\overline{AC}$. Triunghiurile ABC și ALM sînt egale. Notăm întreaga secțiune $MCBLM$ cu Ω. Dreptele b și c, trecînd prin centrul de greutate A al secțiunii Ω, au reciprocele în raport cu această secțiune la infinit, determinate de cîte o direcție.

De exemplu, direcția corespunzătoare dreptei b se află astfel:

Impărțim ambele triunghiuri care compun pe Ω în fîșii paralele cu CM. Se observă că eforturile unitare de pe fîșiile din triunghiul ABC au rezultanta aplicată în B', mijlocul medianei BB_1; în același fel se procedează pentru triunghiul ALM. Rezultă că direcția reciprocă a dreptei b trece prin B' și prin centrul de greutate A. Avem (dr b; dir AB'), (dr c; dir AC'). In modul acesta, introducînd direcția, am introdus puncte de la infinit. Dreapta Δ în raport cu Ω, are ca reciproc un punct la infinit, pe o direcție pe care o determinăm (fig. 2.9) astfel:

Considerăm o involuție determinată de perechile (AC, AB') (AB, AC'), iar razei Δ făcînd parte din involuție, îi determinăm omoloaga utilizînd construcția de la involuție (cap. I,

§ 5, fig. 1.7). Ducem prin A (fig. 2.9) un cerc O cu centru și raza arbitrare și fie B'', C'', B''_1, C''_1, P, intersecțiile dreptelor AB, AC, AB', AC', Δ cu acest cerc. La intersecția drepte-

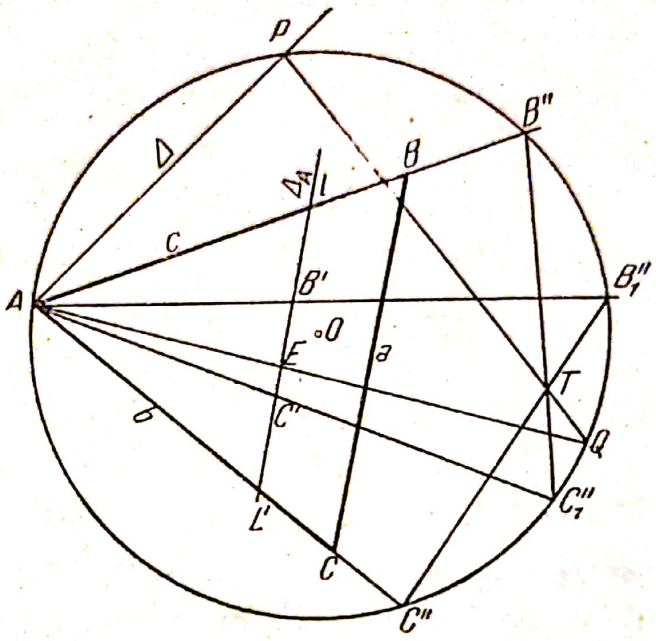

Fig. 2.9

lor $B''C''_1$, $C''B''_1$ este centrul de involuție T. Dreapta PT taie cercul în Q. Dreapta AQ este direcția căutată, iar punctul E, reciprocul dreptei Δ în raport cu ABC, se găsește la intersecția acestei drepte cu Δ_A. (Facem observația că punctele B', C' ca mijloace ale medianelor din B și C sînt la treimile segmentului LL').

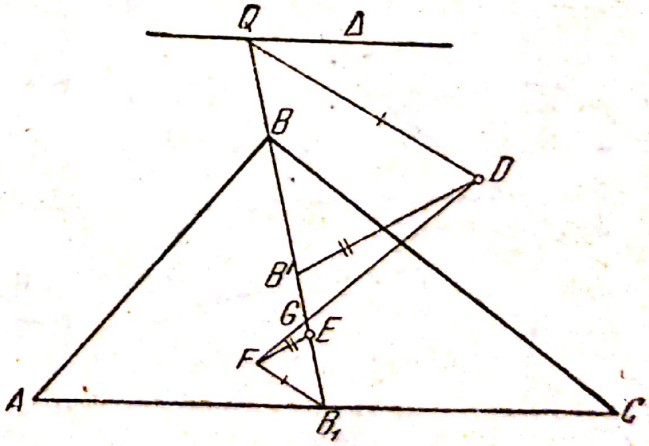

Fig. 2.10

d) **Punctul reciproc al unei drepte paralele cu o latură a triunghiului.** Să găsim reciprocul E al dreptei Δ paralelă la latura AC (fig. 2.10). Știm că punctul E se găsește pe mediana BB_1. Dăm aici construcția grafică, a cărei justificare o vom face în cap. III, § 4. Unim punctul Q de intersecție dintre dreapta Δ și mediana BB_1, cu un punct oarecare D din planul secțiunii și

fie F punctul unde dreapta DG intersectează paralela dusă prin B_1 la DQ. Paralela dusă prin F la DB' (B' mijlocul medianei) determină pe mediana BB_1 punctul E căutat. O construcție mai simplă este dată în fig. 2.11, unde punctul D este luat chiar pe dreapta Δ.

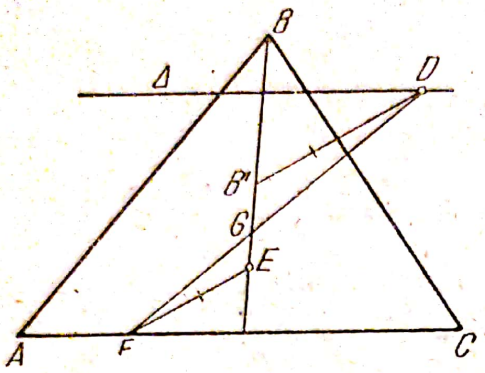

Fig. 2.11

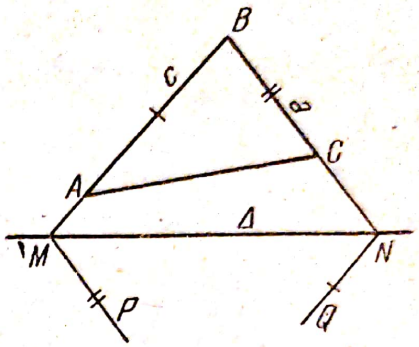

Fig. 2.12

e) **Punctul reciproc al unei drepte oarecare.** Reciprocul E al unei drepte oarecare în raport cu un triunghi ABC, se poate determina prin mai multe metode dintre care indicăm două:

Metoda I. Se prelungesc (fig. 2.12) două laturi, de exemplu a și c, pînă întîlnesc pe Δ în M și N. Ducem MP și NQ paralele la a și c și apoi găsim reciprocele E_1 și E_2 respectiv ale lui MP și NQ, în raport cu triunghiul. Punctul E este la intersecția dreptelor $C'E_1$, $A'E_2$ (deoarece dreptele AB și MP au reciproce respectiv punctele C' și E_1 și cum aceste drepte trec prin punctul M situat pe Δ, în baza proprietăților figurilor reciproce, reciprocul lui Δ este pe $C'E_1$ etc.).

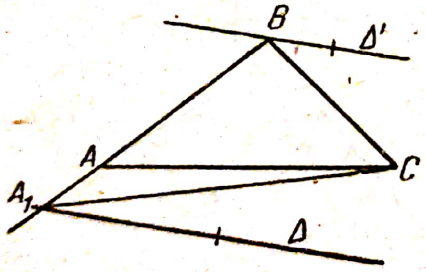

Fig. 2.13

Metoda a II-a. Putem proceda și altfel, și anume: ducem (fig. 2.13) printr-un vîrf oarecare al triunghiului, de exemplu B, o dreaptă Δ' paralelă la Δ. Găsim după metodele indicate anterior punctele E' și E'', reciprocele lui Δ' și A_1C. Punctul E este la intersecția dreptelor GE' cu $C'E''$ (punctul E este pe dreapta GE', deoarece atunci cînd aceasta se deplasează paralel cu ea însăși, reciprocul ei se mișcă pe o dreaptă care trece prin centrul de greutate).

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. SECȚIUNE ÎN FORMĂ DE PARALELOGRAM

Una dintre secțiunile des întîlnite în tehnică este cea în formă de paralelogram. Ea apare în special la culeele podurilor oblice.

a) **Punctul reciproc al unei laturi.** Să aflăm reciprocul E al laturii AB în raport cu paralelogramul $ABCD$ (fig. 2.14). Vom împărți paralelogramul în fișii $A'B'$ de grosime dy,

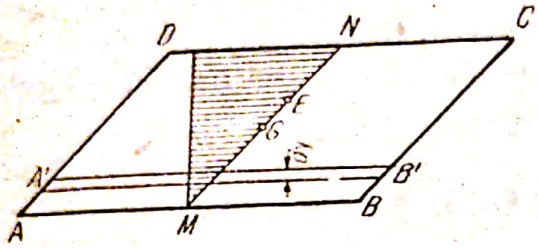

Fig. 2.14

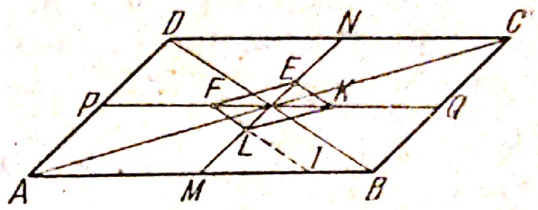

Fig. 2.15

compunînd toate eforturile unitare după aceste fișii, și vom obține forțele dF, aplicate pe dreapta MN, care unește mijloacele lui AB și DC. Deci componentele sînt toate pe MN și variază liniar începînd de la zero în M, pînă la valoarea maximă în N. Rezultanta acestor forțe repartizate pe MN are punctul de aplicare în E, situat la o treime de la N spre M. Rezultă că, la un paralelogram, simburele central $EFLK$ (fig. 2.15) se obține unind treimile segmentelor care unesc mijloacele laturilor opuse.

b) **Punctul reciproc al unei diagonale.** Reciprocul unei diagonale BD (fig. 2.16) este un punct la infinit pe direcția celeilalte diagonale AC și invers. Aceasta se observă ușor geometric, deoarece fișiile din paralelogram paralele cu BD, sînt împărțite de AC în două părți egale, deci se poate scrie (dr BD; dir AC). Înseamnă că, în cazul cînd secțiunea este solicitată de un moment oarecare normal pe AC, dreapta BD este axă neutră.

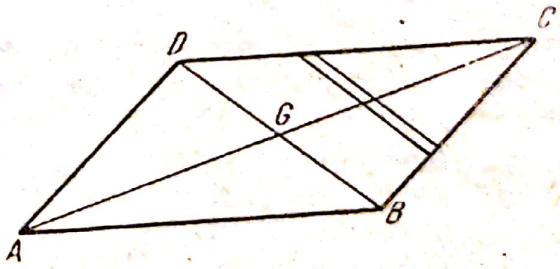

Fig. 2.16

c) **Alte figuri reciproce în paralelogram.** Să considerăm în fig 2.15, simburele central $EFLK$ al paralelogramului $ABCD$. În baza proprietăților figurilor reciproce avem: (dr AB; E), (dr BC; F), (dr CD; L), (dr DA; K), (dr EK; A),

(dr EF ; B), (dr FL ; C), (dr LK ; D). In felul acesta putem determina oricîte figuri reciproce. De exemplu, dreapta EC are reciprocul său I situat la intersecţia dreptelor AB, FL (deoarece AB este dreapta reciprocă a punctului E şi FL dreapta reciprocă a punctului C) etc.

§ 4. SECŢIUNE TRAPEZOIDALĂ.

Studiem acum secţiunile trapezoidale, care se întîlnesc frecvent la zidurile de sprijin, la aripile culeelor, la culeele podurilor etc.

A. METODE GRAFICE

a) **Punctul reciproc al unei baze a trapezului.** Reciprocul E al bazei AB în raport cu trapezul $ABCD$ (fig. 2.17) se află pe dreapta MN, care uneşte mijloacele celor două baze $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$, deoarece fişiile paralele cu bazele sînt împărţite de MN în părţi egale. Din C, ducînd paralela CF la AD şi cunoscînd E_1 şi E_2 reciprocele bazei AB respectiv în raport cu triunghiul BCF şi paralelogramul $ADCF$, punctul E se află la intersecţia dreptelor MN şi E_1E_2.

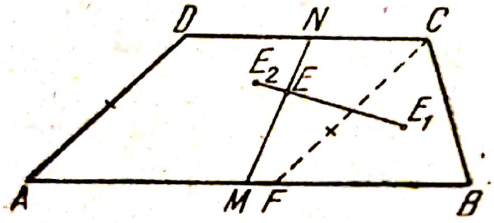

Fig. 2.17

In acelaşi fel se găseşte reciprocul bazei DC.

b) **Punctul reciproc al unei laturi neparalele a trapezului.** *Metoda I.* Prin această metodă vom determina reciprocul E al laturii BC în raport cu trapezul. Considerînd (fig. 2.18) o fişie $A'B'$ paralelă cu AB, eforturile unitare pe

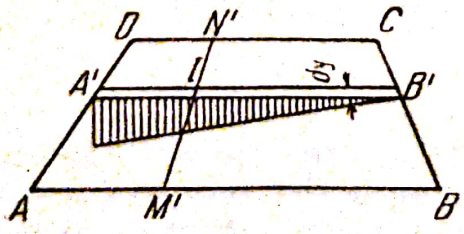

Fig. 2.18

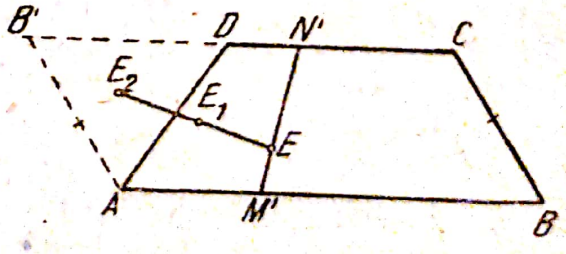

Fig. 2.19

ea sînt dispuse liniar începînd din B' unde sînt nule, iar

rezultanta lor este în I, la treimea lui $\overline{A'B'}$. Deci punctul E este pe dreapta $M'N'$ care unește treimile lui $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$.

Prin A ducem apoi (fig. 2.19) paralela AB' la BC. Aflăm astfel, după cum am indicat anterior, reciprocele E_1 și E_2 ale dreptei BC respectiv în raport cu paralelogramul $BCB'A$ și cu triunghiul $AB'D$. Punctul E căutat este la intersecția lui $M'N'$ cu E_1E_2.

Metoda a II-a (prin involuție). Să determinăm prin această metodă reciprocul laturii AD. Considerăm secțiunea trapezoidală $ABCD$ (fig. 2.20) și luăm pe prelungirea laturilor BA și CD, respectiv $\overline{AB'}=\overline{CD}$ și $\overline{DC'}=\overline{AB}$. Se formează paralelogramul $B'BCC'$. Notăm cu G_1 mijlocul lui $\overline{AD}$ și fie FL și $F'L'$ dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale paralelogramului. Ca și în cazul triunghiului, vom căuta să obținem o involuție din care să facă parte dreapta AD, căreia trebuie să-i determinăm raza omoloagă.

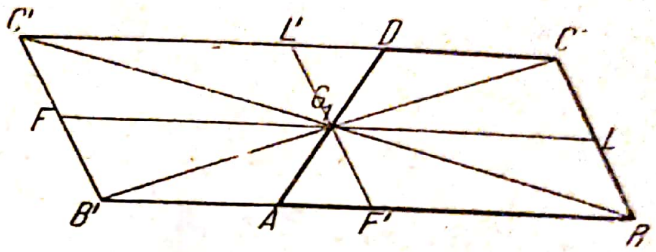

Fig. 2.20

In paralelogramul format, diagonala are punctul reciproc pe direcția dată de cealaltă diagonală, deci (dr $C'B$; dir $B'C$). De asemenea, dreapta FL are punctul reciproc, în raport cu paralelogramul, pe direcția $F'L'$, deoarece eforturile unitare după fișiile paralele cu FL situate deasupra sa, au rezultantele pe G_1L' și cele situate dedesubt pe G_1F'; rezultantele de deasupra sînt egale și de semn contrar cu cele de dedesubt

Din aceste rezultate, interpretate pentru trapezul dat $ABCD$, rezultă că reciprocul dreptei G_1B în raport cu trapezul este pe G_1C. Intr-adevăr, considerînd axa neutră $C'B$ față de paralelogram, eforturile după $ADCB$ și cele după $AB'C'D$ au rezultantele R_1, respectiv $-R_1$ cu punctele de aplicație pe dreapta $B'C$. De aici tragem concluzia că, în cazul cînd considerăm dreapta G_1B ca axă neutră pentru trapezul dat, reciprocul ei este pe G_1C (deoarece punctul de aplicare a lui R_1 este pe $B'C$).

In același fel se arată că reciprocul lui G_1L în raport cu trapezul este pe $L'F'$. De asemenea, reciprocul dreptei AD în raport cu trapezul este pe direcția sa conjugată în raport cu paralelogramul. Deci, vom considera involuția determinată de $(C'B, CB')$, $(FL, F'L')$ și vom determina raza omoloagă a

Scanned with OKEN Scanner

laturii AD. Pe aceasta se va găsi reciprocul lui AD în raport cu trapezul.

Construcția grafică (fig. 2.21) se face astfel: prin G_1, mijlocul lui $\overline{AD}$, ducem un cerc cu raza și centrul arbitrar alese și dreapta Γ paralelă cu BC. Fie C', B', L', H, D' respectiv

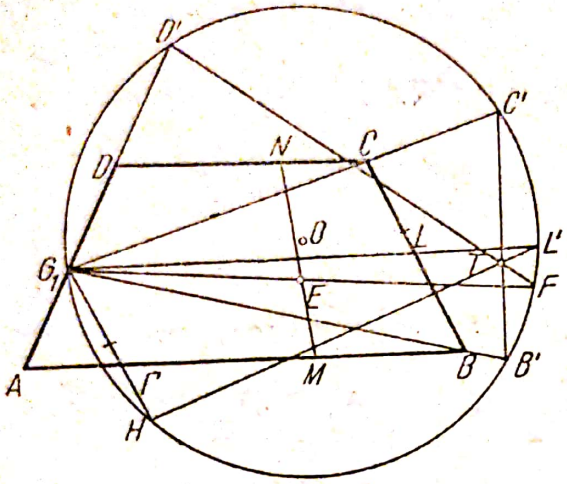

Fig. 2.21

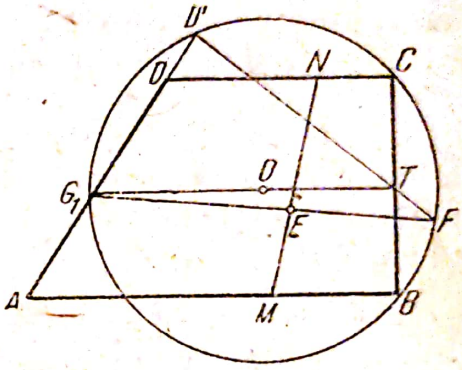

Fig. 2.22

intersecțiile dreptelor G_1C, G_1B, G_1L, ($G_1L \parallel AB$) Γ, G_1D cu cercul. Centrul de involuție T este la intersecția dreptelor $C'B'$, HL'. Dreapta $D'T$ întîlnește cercul a doua oară în F. Punctul E, reciprocul lui AD în raport cu trapezul, se găsește la intersecția dreptei G_1F cu dreapta MN care unește treimile bazelor.

In fig. 2.22, dăm o construcție grafică pentru găsirea reciprocului laturii AD în cazul trapezului dreptunghic, folosind un cerc dus prin punctele B și C.

B. DETERMINAREA ANALITICĂ A SÎMBURELUI CENTRAL

Să determinăm analitic punctele reciproce ale laturilor secțiunii trapezoidale.

Notăm cu a, b, h, MN (fig. 2.23) bazele, înălțimea și dreapta care unește mijloacele laturilor trapezului.

Poziția punctului E, reciprocul bazei a, se găsește pe dreapta MN la distanța p de baza a, respectiv distanța h_1 de cealaltă bază b. Avem: $p = \frac{I}{S}$, unde I este momentul de inerție și S momentul static, luate în raport cu AD. Știm că:

$$I = \frac{(a+3b)\,h^3}{12}; \quad S = \frac{(a+2b)\,h^2}{6},$$

rezultă:

$$p=\frac{h}{2}\cdot\frac{a+3b}{a+2b};\quad h_1=\frac{h}{2}\cdot\frac{a+b}{a+2b}. \tag{2.10}$$

Punctul F, reciprocul bazei b, se găsește tot pe MN, la

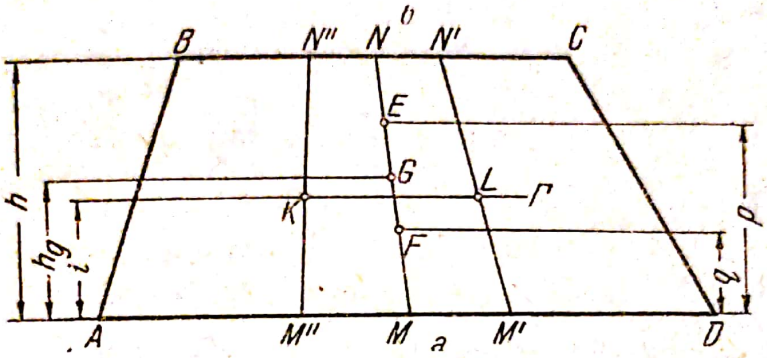

Fig. 2.23

distanțele h_2, respectiv q, de bazele b și a. Asemănător celor de mai sus, se obține și:

$$h_2=\frac{h}{2}\cdot\frac{3a+b}{2a+b},\quad q=\frac{h}{2}\cdot\frac{a+b}{2a+b}. \tag{2.11}$$

Să găsim reciprocele L și K, respectiv ale laturilor AB și CD în raport cu trapezul. Am demonstrat anterior că punctele L și K se găsesc pe $M'N'$ respectiv $M''N''$, drepte care se obțin prin unirea treimilor bazelor. Să arătăm că aceste puncte se află pe o paralelă Γ la baza trapezului, situată la distanța i de baza a, paralelă care este chiar reciproca punctului P de intersecție a laturilor AB și CD în raport cu trapezul. Aceasta rezultă din proprietatea că, în cazul unei drepte care se rotește în jurul unui punct P, reciprocele ei sînt pe o dreaptă Γ, care este reciproca acestui punct.

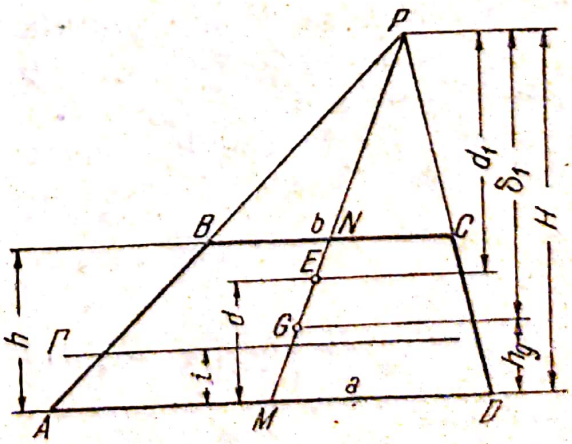

Fig. 2.24

Reciproca punctului P (fig. 2.24) este paralelă cu baza trapezului, căci MNP trece prin G. Rămîne să găsim poziția dreptei Γ.

Vom studia întîi următoarea problemă: dîndu-se o secțiune oarecare cu aria A (fig. 2.25) și reciprocul E al unei drepte Δ, în raport cu această secțiune, să se determine reciprocul F în raport cu aceeași secțiune, al unei drepte Δ_1 paralelă cu Δ. Notăm cu d, d_1, h_g, δ_1, i, j respectiv distanțele de la E, G și F la dreptele Δ și Δ_1, iar cu H distanța dintre Δ și Δ_1, G fiind centrul de greutate al secțiunii. Aplicînd formulele 1.25 referitor la dreapta Δ, considerată ca axă neutră, avem:

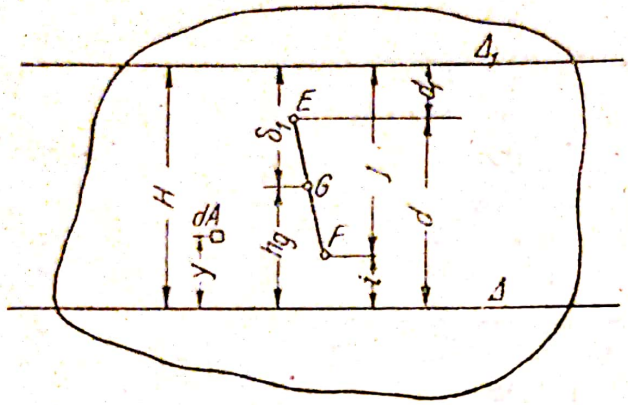

Fig. 2.25

$$S_\Delta d = I_\Delta$$

sau

$$Ah_g d = \int y^2 dA. \qquad (2.12)$$

Considerînd pe Δ_1 ca axă neutră, obținem:

$$S_{\Delta_1} i = \int y(H-y)\,dA,$$

în care, ținînd seama de (2.12), avem:

$$A\delta_1 i = Ah_g H - Ah_g d$$

sau

$$i = \frac{h_g}{\delta_1} d_1. \qquad (2.13)$$

(Se știe că E, G, F sînt coliniare).

Să găsim în cazul trapezului poziția dreptei Γ (fig. 2.24). Pentru aceasta ducem prin P o paralelă la AD și determinăm distanța i a reciprocului acestei paralele la latura a, cu formula (2.13). Dreapta Γ trece prin acest punct. Avem:

$$H = \frac{ah}{a-b}; \quad d = p = \frac{h}{2} \cdot \frac{a+3b}{a+2b};$$

$$h_g = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}; \quad \delta_1 = H - h_g = \frac{2h}{3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-b^2};$$

$$d_1 = H - d = \frac{h}{2} \cdot \frac{a^2+2ab+3b^2}{(a-b)(a+2b)},$$

deci

$$i = \frac{h}{4} \cdot \frac{a^2+2ab+3b^2}{a^2+ab+b^2}. \qquad (2.14)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă punem $\frac{b}{a} = \alpha$, formulele care dau pe h_g, p, q și i devin:

$$\left.\begin{aligned} h_g &= \frac{h}{3} \cdot \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} = \eta_0 h\,; \quad p = \frac{h}{2} \cdot \frac{1+3\alpha}{1+2\alpha} = \eta_1 h, \\ q &= \frac{h}{2} \cdot \frac{1+\alpha}{2+\alpha} = \eta_2 h\,; \quad i = \frac{h}{4} \cdot \frac{1+2\alpha+3\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} = \eta_3 h. \end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

In tabela care urmează se găsesc valorile lui η_0, η_1, η_2, η_3, în funcție de $\alpha = \frac{b}{a}$.

Tabelă pentru calculul centrului de greutate și al sîmburelui central la trapez. Distanțele se socotesc de la baza mare a, a trapezului

$\frac{b}{a} = \alpha$	G $h_g = \eta_0 h$ η_0	(dr a; E) $p = \eta_1 h$ η_1	(dr b; F) $q = \eta_2 h$ η_2	L, K $i = \eta_3 h$ η_3
0,00	0,333 3	0,500 0	0,250 0	0,250 0
0,01	0,336 6	0,504 9	0,251 2	0,252 5
0 02	0,339 9	0,509 6	0,252 5	0,255 1
0,03	0,343 0	0,514 1	0,253 7	0,257 7
0,04	0,346 1	0,518 5	0,254 9	0,260 4
0,05	0,349 2	0,522 7	0,256 1	0,263 1
0,06	0 352 2	0,526 8	0,257 3	0,265 8
0,07	0,355 1	0,530 7	0,258 4	0,268 5
0,08	0,358 0	0,534 5	0,259 6	0,271 3
0,09	0,360 8	0,538 1	0,260 8	0,274 2
0,10	0,363 6	0,541 7	0,261 9	0,277 0
0,11	0,366 4	0,545 1	0,263 0	0,279 9
0,12	0,369 0	0,548 4	0,264 1	0,282 8
0,13	0,371 7	0,551 6	0,265 2	0,285 7
0,14	0,374 3	0,554 7	0,266 3	0,288 6
0,15	0,376 8	0,557 7	0,267 4	0,291 6
0,16	0,379 3	0,560 6	0,268 5	0,294 5
0,17	0,381 8	0,563 4	0,269 6	0,297 5
0,18	0,384 2	0,566 2	0,270 6	0,300 5
0,19	0,386 5	0,568 8	0,271 7	0,303 5
0,20	0,388 9	0,571 4	0,272 7	0,306 4
0,21	0,391 2	0,573 9	0,273 7	0,309 4
0,22	0,393 4	0,576 4	0,274 8	0,312 4
0,23	0,395 7	0,578 8	0,275 8	0,315 4
0,24	0,397 8	0,581 1	0,276 8	0 318 4
0,25	0,400 0	0,583 3	0,277 8	0,321 4
0,26	0,402 1	0,585 5	0,278 8	0,324 4
0,27	0,404 2	0,587 7	0,279 7	0,327 4

Scanned with OKEN Scanner

Continuare

$\frac{b}{a}=\alpha$	$\frac{G}{h_g=\eta_0 h}$ η_0	(dr a ; E) $p=\eta_1 h$ η_1	(dr b ; F) $q=\eta_2 h$ η_2	L, K $l=\eta_3 h$ η_3
0,28	0,406 2	0,589 7	0,230 7	0,330 4
0,29	0,408 3	0,591 8	0,281 6	0,333 4
0,30	0,410 2	0,593 7	0,282 6	0,336 3
0,31	0,412 2	0,595 7	0,283 5	0,339 3
0 32	0,414 1	0,597 6	0,284 5	0,342 2
0,33	0,416 0	0,599 4	0,285 4	0,345 2
0,34	0,417 9	0,601 2	0,286 3	0,348 1
0,35	0,419 7	0,602 9	0,287 2	0,351 0
0,36	0,421 6	0,604 6	0,288 1	0,353 9
0 37	0,423 3	0,606 3	0,289 0	0,356 8
0,38	0 425 1	0,607 9	0,289 9	0,359 7
0,39	0,426 8	0,609 5	0,290 8	0,362 7
0,40	0,428 6	0,611 1	0,291 7	0,365 9
0,41	0,430 3	0,612 6	0,292 5	0,368 2
0,42	0,431 9	0,614 1	0,293 4	0,371 0
0,43	0,433 6	0,615 6	0,294 2	0,373 8
0,44	0,435 2	0,617 0	0,295 1	0,376 6
0,45	0,436 8	0,618 4	0,295 9	0,379 3
0,46	0,438 3	0,619 8	0,296 7	0,382 1
0,47	0,439 9	0 621 1	0,297 6	0,384 8
0,48	0,441 4	0,622 4	0,298 4	0,387 5
0,49	0,442 9	0,623 7	0,299 2	0,390 2
0,50	0,444 4	0,625 0	0,300 0	0,392 8
0,51	0,445 0	0,626 2	0,300 8	0,395 5
0,52	0,447 4	0,627 4	0,301 6	0,398 1
0,53	0,448 8	0,628 6	0,302 4	0,400 7
0,54	0,450 2	0 629 8	0,303 1	0,403 3
0,55	0,451 6	0,630 9	0,303 9	0,405 9
0,56	0,453 0	0,632 1	0,304 7	0,408 4
0,57	0,454 3	0,633 2	0,305 4	0,410 9
0,58	0,455 7	0,634 2	0,306 2	0,413 4
0,59	0,457 0	0,635 3	0,306 9	0,415 9
0,60	0,458 3	0,636 4	0,307 7	0,418 4
0,61	0,459 6	0,637 4	0,308 4	0,420 8
0,62	0,460 9	0,638 4	0,309 2	0,423 2
0,63	0 462 2	0,639 4	0,309 9	0 425 6
0,64	0,463 4	0,640 3	0,310 6	0,428 0
0,65	0,464 6	0,641 3	0,311 3	0,430 3
0,66	0,465 8	0,642 2	0,312 0	0,432 7
0,67	0,467 1	0,643 2	0,312 7	0,435 0
0,68	0,468 2	0,644 1	0,313 4	0,437 3
0,69	0,469 4	0,644 9	0,314 1	0,439 5
0,70	0,470 6	0,645 8	0,314 8	0,441 8
0,71	0,471 7	0,646 7	0,315 5	0,444 0
0,72	0,472 9	0,647 5	0,316 2	0,446 2
0,73	0,474 0	0,648 4	0,316 8	0,448 4
0,74	0,475 1	0,649 2	0,317 5	0,450 5

Scanned with OKEN Scanner

Continuare

$\frac{b}{a}=\alpha$	$\frac{G}{h_g=\eta_0 h}$ η_0	(dr a : E) $p=\eta_1 h$ η_1	(dr b : F) $q=\eta_2 h$ η_2	L, K $t=\eta_3 h$ η_3
0,75	0,476 2	0,650 0	0,318 2	0,452 7
0,76	0,477 3	0,650 8	0,318 8	0,454 8
0,77	0,478 3	0,651 6	0,319 5	0,456 9
0,78	0,479 2	0,652 3	0,320 1	0,459 1
0,79	0,480 4	0,653 1	0,320 8	0,461 1
0,80	0,481 5	0,653 8	0,321 4	0,463 1
0,81	0,482 5	0,654 6	0,322 1	0,465 1
0,82	0,483 5	0,655 3	0,322 7	0,467 1
0,83	0,484 5	0,656 0	0,323 3	0,469 1
0,84	0,485 5	0,656 7	0,323 9	0,471 1
0,85	0,486 5	0,657 4	0,324 6	0,473 0
0,86	0,487 4	0,658 1	0,325 2	0,474 9
0,87	0,488 4	0,658 7	0,325 8	0,476 8
0,88	0,489 4	0,659 4	0,326 4	0,478 7
0,89	0,490 3	0,660 1	0,327 0	0,480 6
0,90	0,491 2	0,660 7	0,327 6	0,482 5
0,91	0,492 1	0,661 3	0,328 2	0,484 3
0,92	0,493 0	0,662 0	0,328 8	0,486 1
0,93	0,493 9	0,662 6	0,329 3	0,487 9
0,94	0,494 8	0,663 2	0,329 9	0,489 7
0,95	0,495 7	0,663 8	0,330 5	0,491 4
0,96	0,496 6	0,664 4	0,331 1	0,493 2
0,97	0,497 5	0,665 0	0,331 6	0,494 9
0,98	0,498 3	0,665 5	0,332 2	0,496 6
0,99	0,499 2	0,666 1	0,332 8	0,498 3
1,00	0,500 0	0,666 7	0,333 3	0,500 0

§ 5. SECȚIUNE IN FORMĂ DE PATRULATER OARECARE

A. METODA ANALITICĂ

Problema care se pune în acest caz este următoarea considerînd ca axă neutră în raport cu secțiunea $ABCD$, dreapta Δ (fig. 2.26), să se determine punctul E de aplicare al forței. Vom determina punctul E prin distanțele δ_{AC}, δ_{BD} la cele două diagonale. Notăm cu s_A, s_B, s_C, s_D distanțele de la A, B, C, D la dreapta Δ. Se descompune patrulaterul în triunghiurile ABC și CDA. Momentele statice ale fiecărui triunghi în raport cu Δ și distanțele la diagonala AC ale punctelor reciproce E_1, E_2 ale dreptei Δ în raport cu aceste triunghiuri sînt (aplicăm formulele de la triunghi):

$$\left.\begin{aligned} S_{\Delta(ABC)} &= \frac{s_A+s_B+s_C}{6}\overline{AC}h_b, \quad \delta_b = \left(1+\frac{s_B}{s_A+s_B+s_C}\right)\frac{h_b}{4} \\ S_{\Delta(ACD)} &= \frac{s_A+s_C+s_D}{6}\overline{AC}h_d, \quad \delta_d = \left(1+\frac{s_D}{s_A+s_C+s_D}\right)\frac{h_d}{4} \end{aligned}\right\} \quad (2.16)$$

unde h_b și h_d sînt distanțele de la B și D la diagonala AC (la fel h_a, h_c). Considerăm momentele statice $S_{\Delta(ABC)}$ și $S_{\Delta(ACD)}$ ca vectori paraleli cu AC aplicați în E_1 și E_2 și luăm momentele lor în raport cu dreapta AC apoi notăm cu $S_\Delta = S_{\Delta(ABC)} + S_{\Delta(ACD)}$, momentul static al patrulaterului în raport cu Δ. Avem:

$$S_\Delta \cdot \delta_{AC} = \delta_b \cdot S_{\Delta(ABC)} - \delta_d S_{\Delta(ACD)}.$$

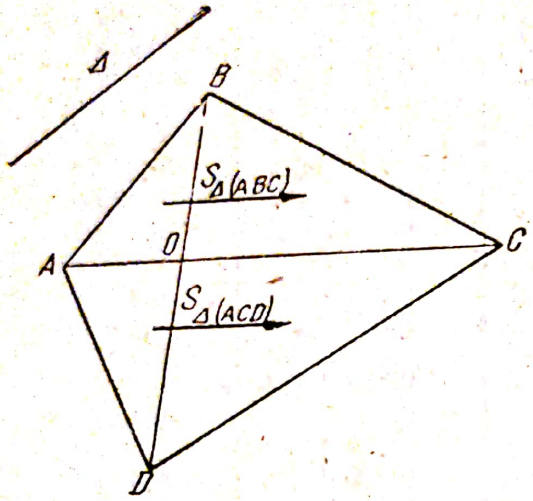

Fig. 2.26

Inlocuind valorile lui $S_{\Delta(ABC)}$, $S_{\Delta(ACD)}$, δ_b și δ_d din relațiile (2.16), calculăm de aici pe δ_{AC}. In același fel se poate determina δ_{BD}, astfel încît obținem:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{AC} &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(s_a+2s_B+s_C)h_b^2-(s_A+s_C+2s_D)h_d^2}{(s_A+s_B+s_C)h_b+(s_A+s_C+s_D)h_d} \\ \delta_{BD} &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(2s_A+s_B+s_D)h_a^2-(s_B+2s_C+s_D)h_c^2}{(s_A+s_B+s_D)h_a+(s_B+s_C+s_D)h_c}. \end{aligned}\right\} \quad (2.17)$$

Distanța δ_{AC} se ia de la AC spre B, dacă este pozitivă, și spre D dacă este negativă, iar δ_{BD} se ia de la BD spre A, dacă este pozitivă, și spre C dacă este negativă.

— Punctul reciproc al diagonalei AC în raport cu patrulaterul este determinat de distanțele:

$$\delta_{AC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{s_B^2-s_Bs_D+s_D^2}{s_B-s_D}; \quad \delta_{BD} = \frac{1}{4}(h_a+h_c). \quad (2.18\,a)$$

Pentru cealaltă diagonală, calculul este asemănător.

Scanned with OKEN Scanner

— Punctul reciproc al unei laturi a patrulaterului, de exemplu DC, îl determinăm făcînd în formulele (2.17) $s_D=s_C=0$ și obținem:

$$\left.\begin{aligned}\delta_{AC}&=\frac{1}{4}\cdot\frac{(s_A+2s_B)\,h_b^2-s_Ah_d^2}{(s_A+s_B)\,h_b+s_Ah_d}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(1+2\dfrac{s_B}{s_A}\right)h_b^2-h_d^2}{\left(1+\dfrac{s_B}{s_A}\right)h_b+h_d}\\ \delta_{BD}&=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2s_A+s_B)\,h_a^2-s_Bh_c^2}{(s_A+s_B)\,h_a+s_Bh_c}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(1+2\dfrac{s_A}{s_B}\right)h_a^2-h_c^2}{\left(1+\dfrac{s_A}{s_B}\right)h_a+h_c}\end{aligned}\right\}\qquad(2.18\,b)$$

Observații: — Mărimile s_A, s_B, s_C, s_D pot fi măsurate de la A, B, C, D la dreapta Δ pe o aceeași direcție aleasă arbitrar. Dacă în formulele (2.17), (2.18 a), (2.18 b), luăm $h_a=\overline{OA}$, $h_b=\overline{OB}$, $h_c=\overline{OC}$, $h_d'=\overline{OD}$, (punctul O fiind intersecția diagonalelor), obținem coordonatele punctului E în sistemul de referință format de diagonalele patrulaterului.

B. METODE GRAFICE

a) **Punctul reciproc al unei diagonale a patrulaterului.** Vom determina reciprocul E al diagonalei AC.

Metoda I. Găsim punctele B_1 și D_1, reciprocele diagonalei AC respectiv în raport cu triunghiurile ABC și ADC (fig. 2.27), care sînt la mijloacele medianelor duse din B și D.

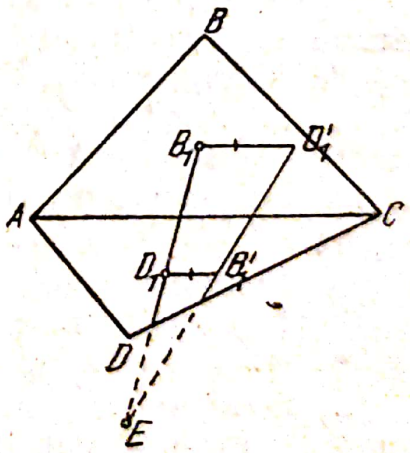

Fig. 2.27

Din B_1 luăm pe o direcție oarecare (de exemplu, paralelă cu AC) un segment $B_1D_1'=kh_d^2$, iar în D_1 punem cu aceeași direcție și sens $D_1B_1'=kh_b^2$ (k fiind un coeficient de proporționalitate, iar h_b și h_d înălțimile în cele două triunghiuri, duse din B și D). Punctul E căutat este la intersecția dreptelor B_1D_1, $B_1'D_1'$. Justificarea construcției se face ținînd seamă că mărimile puse în B_1 și D_1 sînt proporționale cu momentele statice ale triunghiurilor componente în raport cu AC și că se caută punctul de aplicare al rezultantei acestora.

Metoda a II-a. Se găsesc ca mai sus punctele B_1 și D_1, reciprocele diagonalei AC în raport cu triunghiurile componente, apoi se determină reciprocele A_1 și C_1 ale aceleiași drepte respectiv în raport cu triunghiurile ABD și BCD. Punctul E este la intersecția dreptelor A_1C_1 și B_1D_1.

b) **Punctul reciproc al unei laturi a patrulaterului.** Pentru a găsi reciprocul E al laturii AD, procedăm astfel:

Metoda I. Determinăm (fig. 2.28) punctele B_2, D_2, A_2, C_2, reciprocele dreptei AD respectiv în raport cu triunghiurile ABC, ADC, DAB și DCB. Punctul E căutat este la intersecția dreptelor B_2D_2, A_2C_2.

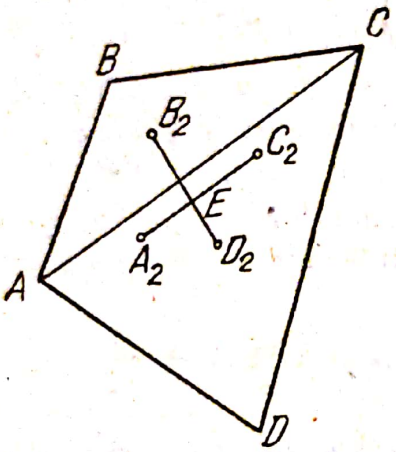

Fig. 2.28

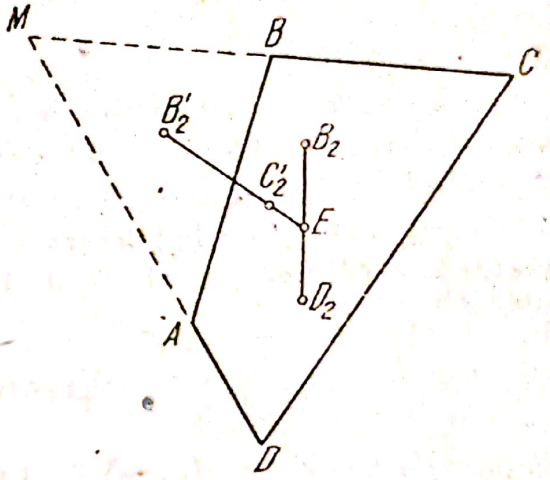

Fig. 2.29

Metoda a II-a. Găsim punctele B_2 și D_2 ca mai sus și determinăm reciprocele C'_2 și B'_2 ale dreptei AD respectiv față de triunghiurile MCD și MBA (fig. 2.29). Punctul E se află la intersecția dreptelor B_2D_2, $C'_2B'_2$. Se poate însă ca punctul M, intersecția prelungirilor laturilor BC și AD, să fie în afara cadrului. In acest caz, B'_2 se găsește astfel: se împart $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ în cîte patru părți egale (fig. 2.30). Prin P și R se duc paralele la BC, iar prin I se duce o paralelă la AB pînă întîlnește paralela dusă prin R în punctul B'_2. In același mod se găsește și C'_2.

Se mai pot imagina și alte metode, de exemplu se descompune patrulaterul de două ori în cîte un trapez și un triunghi, ducînd din A apoi din D, respectiv, paralele la laturile DC și AB etc.

c) **Punctul reciproc al unei drepte duse printr-un vîrf al patrulaterului.** Să determinăm reciprocul E al dreptei oarecare Δ dusă prin A (fig. 2.31). Găsim punctele E_1 și E_2,

reciprocele dreptei Δ în raport cu patrulaterul $ABCC_1$ și cu triunghiul AC_1D. Aflăm apoi prin procedeele indicate la triunghi, reciprocele E_3 și E_4 ale dreptei Δ în raport cu triunghiurile ABC și ACD. Punctul E se află la intersecția dreptelor E_1E_2, E_3E_4.

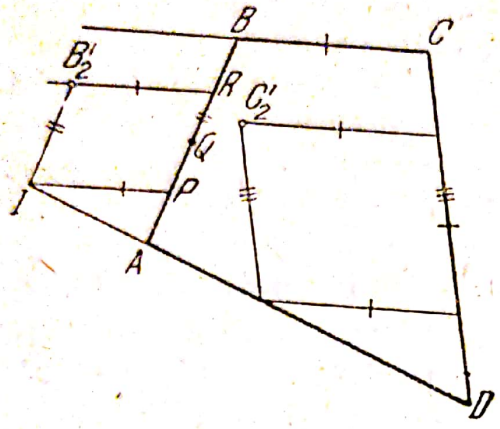

Fig. 2.30

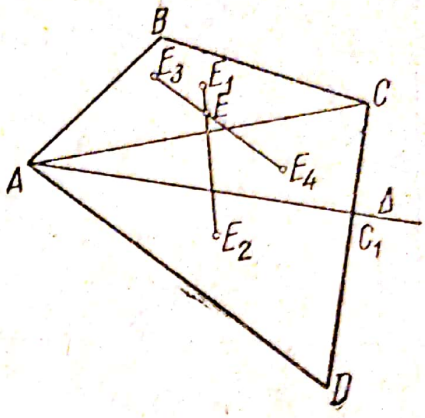

Fig. 2.31

d) **Punctul reciproc al unei drepte oarecare în raport cu patrulaterul.** Pentru a găsi reciprocul E al unei drepte oarecare Δ în raport cu patrulaterul $ABCD$, procedăm astfel:

Aflăm, așa cum am arătat la triunghi, reciprocele B_1, D_1, A_1, C_1 ale dreptei Δ în raport cu triunghiurile ABC, ADC, BAD și BCD, respectiv. Punctul E se găsește la intersecția dreptelor B_1D_1, A_1C_1.

§ 6. SECȚIUNE POLIGONALĂ

A. METODA ANALITICĂ

Principiul metodei constă în descompunerea secțiunii în figuri simple, ca: triunghiuri, trapeze etc.

Să determinăm reciprocul E al dreptei Δ în raport cu secțiunea $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$.

Coordonatele vîrfurilor sînt $B_i(x_i, y_i)$, unde $i=1, 2, \ldots, 6$. Descompunînd secțiunea în triunghiuri ca în figură (fig. 2.32), determinăm reciprocele dreptei Δ în raport cu fiecare dintre aceste triunghiuri, pe care le notăm cu $E_j(\alpha_j, \beta_j)$ unde $j=1, 2, 3, 4$.

Distanțele centrelor de greutate ale triunghiurilor componente la axa Ox sînt date de:

$$d_1=\frac{y_1+y_2+y_3}{3};\quad d_2=\frac{y_1+y_3+y_6}{3};\quad d_3=\frac{y_3+y_4+y_6}{3};\quad d_4=\frac{y_4+y_5+y_6}{3}.$$

Notăm cu $S_{j\Delta}$, momentele statice ale triunghiurilor componente în raport cu Δ și cu d, A, S_Δ, respectiv, distanța de la centrul de greutate al secțiunii date la dreapta Δ, aria aceleiași secțiuni și momentul static al ei în raport cu Δ. Avem:

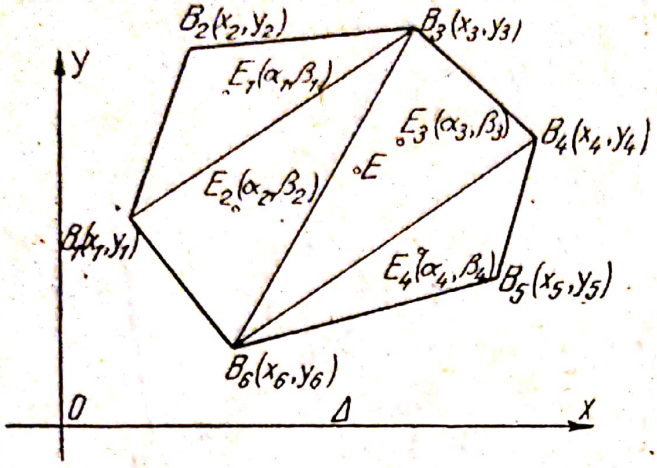

Fig. 2.32

$$S_{j\Delta}=A_j d_j; \quad S_\Delta=\sum_1^4 S_{j\Delta}$$

sau

$$S_\Delta=Ad; \quad d=\frac{\sum A_j d_j}{A}.$$

În punctele aflate E_j se consideră mărimile respective $S_{j\Delta}$, toate paralele cu o direcție oarecare. Punctul de aplicare al rezultantei acestor mărimi va fi punctul E căutat, ale cărui coordonate sînt date de formulele:

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{\alpha_1 S_{1\Delta}+\alpha_2 S_{2\Delta}+\alpha_3 S_{3\Delta}+\alpha_4 S_{4\Delta}}{S_\Delta}=\frac{\sum \alpha_j S_{j\Delta}}{S_\Delta}\\ y_0&=\frac{\beta_1 S_{1\Delta}+\beta_2 S_{2\Delta}+\beta_3 S_{3\Delta}+\beta_4 S_{4\Delta}}{S_\Delta}=\frac{\sum \beta_j S_{j\Delta}}{S_\Delta}. \end{aligned}\right\} \quad (2.19)$$

În cazul cînd axa neutră Δ trece prin centrul de greutate al secțiunii, punctul E este la infinit pe direcția m dată de expresia:

$$m=\frac{\sum \beta_j S_{j\Delta}}{\sum \alpha_j S_{j\Delta}}, \quad (2.20)$$

unde

$$\sum S_{j\Delta}=S_\Delta=0.$$

B. METODE GRAFICE SAU GRAFO-ANALITICE

Să determinăm reciprocul E al diagonalei B_1B_3 în raport cu secțiunea $B_1B_2B_3B_4B_5$ (fig. 2.33).

Prin metodele indicate găsim punctele E_1, E_2, E_3, E_4, reciprocele dreptei B_1B_3 în raport cu triunghiul $B_1B_2B_3$, pa-

Scanned with OKEN Scanner

trulaterul $B_1B_3B_4B_5$, triunghiul $B_3B_4B_5$ și patrulaterul $B_1B_2B_3B_5$, respectiv.

Punctul E este la intersecția dreptelor E_1E_2, E_3E_4.

In același mod se determină și punctul reciproc al unei laturi oarecare a poligonului dat.

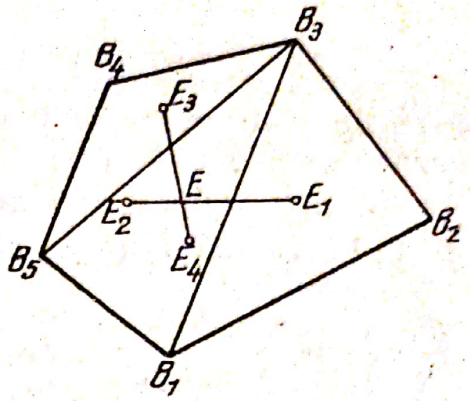

Fig. 2.33

— De multe ori este însă mai ușor, atunci cînd trebuie să găsim reciprocul unei drepte, să calculăm anumite elemente cu ajutorul formulelor stabilite anterior la triunghi, trapez, patrulater oarecare etc., și apoi să facem numai o parte din construcțiile grafice.

— Ne vom mărgini la studiul de pînă aici, făcînd observația că acesta se poate extinde și asupra secțiunilor care au o parte sau întregul contur curb.

CAPITOLUL III

DETERMINAREA EFORTURILOR UNITARE LA SECȚIUNI OMOGENE

§ 1. DETERMINAREA EFORTURILOR UNITARE FOLOSIND RELAȚIILE CARE DETERMINĂ PUNCTUL DE APLICARE AL FORȚEI

In capitolul precedent am studiat determinarea figurilor reciproce la diferite secțiuni. Acum vom arăta cum putem determina eforturile unitare ale unei secțiuni cu ajutorul figurilor reciproce, folosind relațiile (1.25) care determină punctul de aplicare al forței. Să considerăm secțiunea cu suprafața A, acționată în punctul E de o forță N, Δ_E fiind axa neutră corespunzătoare. Rezolvarea problemei comportă:

— determinarea axei neutre,

— determinarea eforturilor unitare în orice punct al secțiunii, cu ajutorul formulelor (1.24) și (1.27).

Axa neutră se determină prin două puncte ale ei; uneori, pentru verificare se vor căuta mai multe puncte.

A. DETERMINAREA EFORTURILOR UNITARE FOLOSIND DOUĂ DREPTE OARECARE CARE NU TREC PRIN G ȘI PUNCTELE LOR RECIPROCE

1. Metoda I

Expunerea metodei. Se iau două drepte oarecare Δ și Δ', care nu trec prin centrul de greutate G al secțiunii și ale căror reciproce B, respectiv B', sînt cunoscute.

Să determinăm axa neutră Δ_E, corespunzătoare punctului de aplicare dat $E\,(a, b)$ al forței. Pentru aceasta considerăm întîi dreapta Δ și reciprocul ei B (fig. 3.1) și urmărim determinarea unui punct Q al axei neutre Δ_E. Luăm ca axe de coordonate pentru x pe Δ, iar pentru y o perpendiculară oarecare pe Δ. Din formulele (1.25), coordonatele lui $B\,(x_1, y_1)$ sînt:

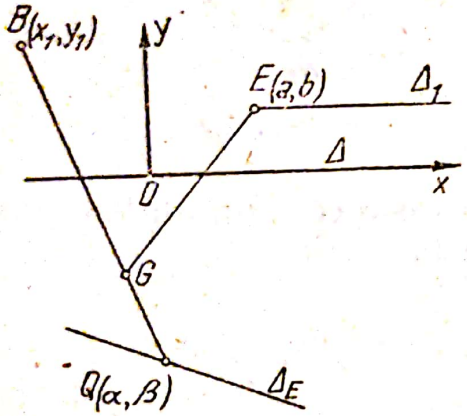

Fig. 3.1

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{I_{xy}}{S_\Delta} = \frac{\int xy\,dA}{Ad_\Delta}; \\ y_1 &= \frac{I_x}{S_\Delta} = \frac{\int y^2\,dA}{A\,d_\Delta}, \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

d_Δ fiind distanța de la G la dreapta Δ.

În baza proprietăților figurilor reciproce, tuturor punctelor de pe dreapta Δ le corespund drepte reciproce care trec prin B, iar punctului I de la infinit al dreptei Δ îi corespunde ca reciprocă dreapta BG. Ducem apoi prin E dreapta Δ_1 paralelă cu Δ și îi determinăm punctul reciproc Q. Cum toate dreptele care trec prin E au punctele lor reciproce pe Δ_E, rezultă că punctul Q este pe axa neutră Δ_E. Dreapta Δ_1 trecînd prin punctul I de la infinit al lui Δ, rezultă că punctul Q se găsește pe dreapta BG, reciproca lui I. Pentru găsirea ordonatei lui Q aplicăm și aici formula (1.25), și obținem:

$$y_Q = \frac{I_{x\Delta_1}}{S_{\Delta_1}} = \frac{\int (y-b)\,y\,dA}{Ad_{\Delta_1}} = \frac{\int y^2\,dA - b\int y\,dA}{Ad_{\Delta_1}}, \quad (3.2)$$

unde d_{Δ_1} este distanța de la G la Δ_1.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în relația (3.2) introducem pe y_1, din relațiile (3.1) obținem:

$$y_Q = \frac{d_\Delta}{d_{\Delta_1}}(y_1 - b). \tag{3.3}$$

Punctul Q este astfel determinat, găsindu-se pe dreapta GB și având ordonata dată de formula (3.3).

Regula semnelor pentru y_Q este următoarea: dacă d_Δ și d_{Δ_1} au același sens, semnul este dat de $y_1 - b$, iar dacă ele sînt de sensuri contrare, semnul este contrar lui $y_1 - b$.

Pentru determinarea completă a axei neutre Δ_E, corespunzătoare punctului E, vom considera dreapta Δ' și reciprocul ei B', apoi determinăm în mod analog punctul Q'. Dreapta QQ' este axa neutră Δ_E căutată.

Rezolvarea completă a problemei va fi făcută întîi analitic și apoi grafic.

a) **Cazul cînd punctul de aplicare al forței este la distanță finită.**

Analitic. Fiind date (dr Δ, Δ'; B, B') în raport cu o secțiune A, să determinăm axa neutră Δ_E corespunzătoare unui punct E (a, b), prin două puncte ale ei Q (x_Q, y_Q) și Q' $(x_{Q'}, y_{Q'})$.

Considerăm punctele prin coordonatele lor: G (ξ, η), $B(x_1, y_1)$ și $B'(x_2, y_2)$. Avem:

ecuația dreptei BG: $\dfrac{y - y_1}{y_1 - \eta} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - \xi}$;

ecuația dreptei $B'G$: $\dfrac{y - y_2}{y_2 - \eta} = \dfrac{x - x_2}{x_2 - \xi}$.

Punctul Q se găsește pe dreapta BG și ordonata lui este dată de formula (3.3):

$$y_Q = \frac{\eta}{\eta - b}(y_1 - b).$$

Prin rezolvarea ecuațiilor de mai sus rezultă imediat coordonatele lui Q și Q':

$$\left.\begin{aligned} Q\left(x_Q = \frac{\eta x_1 - \xi b}{\eta - b},\quad y_Q = \frac{\eta(y_1 - b)}{\eta - b}\right) \\ Q'\left(x_{Q'} = \frac{\xi(x_2 - a)}{\xi - a},\quad y_{Q'} = \frac{\xi y_2 - \eta a}{\xi - a}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Menționăm că drept axe de coordonate s-au luat dreptele Δ și Δ', nefiind necesar ca ele să fie rectangulare.

Grafic. Indicăm întîi mai multe construcții grafice pentru punctul Q, atunci cînd se cunosc punctul E, (dr Δ; B) și centrul de greutate G.

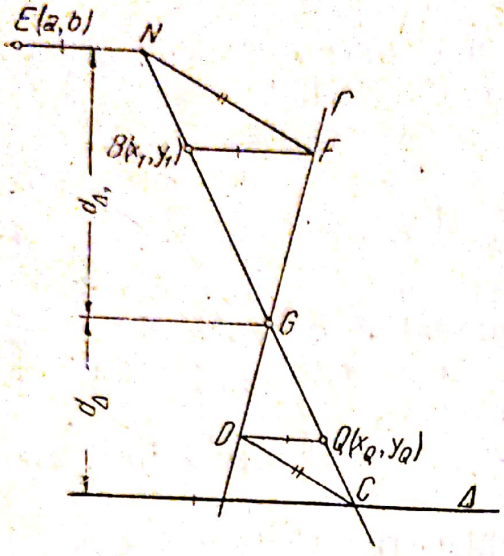

Fig. 3.2

Într-o primă construcție, prin punctul G (fig. 3.2) se duce întîi o dreaptă oarecare Γ; N și F sînt punctele unde paralelele duse prin E și B la dreapta Δ taie respectiv dreptele GB și Γ, iar punctul C este intersecția dreptelor GB și Δ. Paralela dusă prin C la dreapta FN întîlnește pe Γ în D, iar punctul Q se găsește la intersecția dintre dreapta GB și paralela dusă prin D la FB.

Demonstrarea construcției se face observînd că triunghiurile CDG și NFG sînt asemenea, și deci avem:

$$\frac{d_\Delta}{d_{\Delta_1}} = \frac{\overline{CD}}{NF}.$$

Triunghiurile CDQ și NFB fiind asemenea, scriem proporționalitatea între laturi și înălțimi:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{FN}} = \frac{y_Q}{y_1 - b},$$

și deci din cele două proporții rezultă:

$$y_Q = \frac{d_\Delta}{d_{\Delta_1}}(y_1 - b)$$

care este relația (3.3) cunoscută.

Rezultă că punctul Q astfel determinat este același cu cel găsit pe cale analitică.

— O altă construcție grafică pentru determinarea lui Q se face, în mod mai general, astfel (fig. 3.3): fie punctul N, la intersecția dreptei GB cu paralela dusă prin E la axa Δ și F un punct oarecare luat pe dreapta Γ dusă arbitrar prin G. Paralela dusă prin C la FN intersectează dreapta Γ în D.

Scanned with OKEN Scanner

Punctul Q se află la intersecția dreptei GB cu paralela dusă prin D la dreapta FB.

Urmărim demonstrația pe fig. 3.4. Determinăm întîi punc-

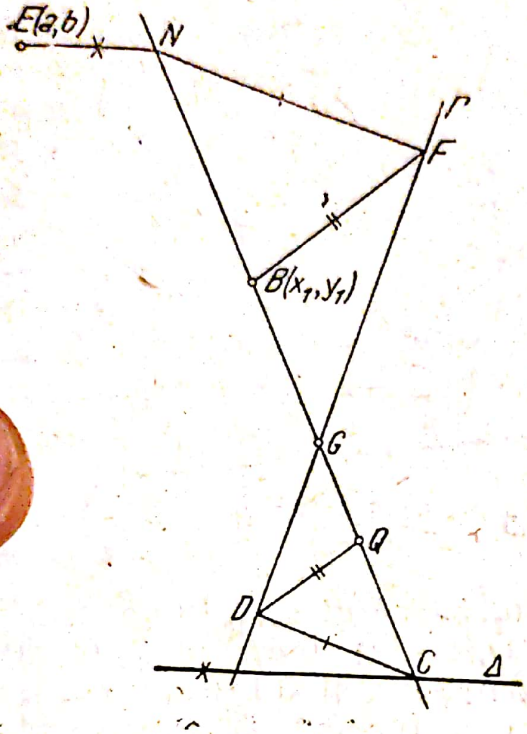

Fig. 3.3

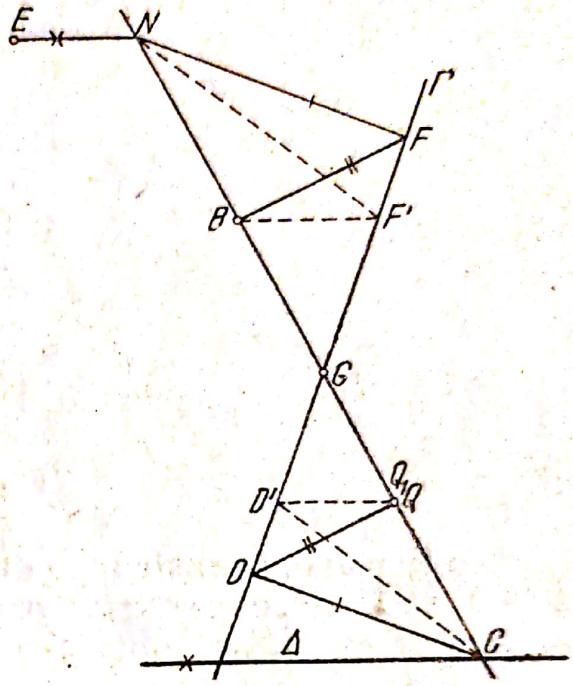

Fig. 3.4

tul Q după metoda precedentă (pe figură s-a desenat punctat). Să admitem că găsim alt punct Q_1. Vom arăta că punctele Q și Q_1 coincid. Din construcția punctată rezultă:

$$\frac{\overline{NF'}}{\overline{CD'}} = \frac{\overline{NG}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{CQ_1}}.$$

In noua construcție avem $CD \parallel NF$ și $DQ \parallel FB$ și deci

$$\frac{\overline{NF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{NG}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{CQ}}.$$

Comparînd cele două șiruri de rapoarte, rezultă $\overline{CQ_1} = \overline{CQ}$ și deci Q_1 coincide cu Q.

— Pe baza celor arătate dăm mai multe construcții grafice pentru axa neutră, construcții grafice indicate în fig. 3.5 și fig. 3.6.

Fig. 3.5 este făcută pe baza primei construcții, iar fig. 3.6 pe baza construcției a doua.

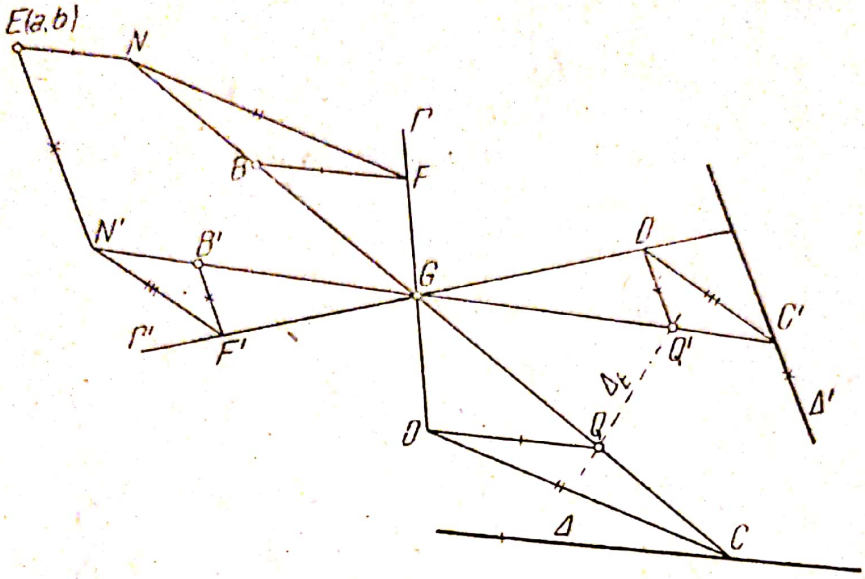

Fig. 3.5

— Urmărind construcția din fig. 3.6 rezultă că, luînd dreptele Γ și Γ' duse arbitrar prin G, astfel încît să coincidă amîndouă cu GE, se obține o construcție simplificată dată în fig. 3.7 pe care o vom utiliza la determinarea axei neutre. Construcția se face astfel (fig. 3.7): se unește G cu punctele B, B', E și se află D și D', intersecțiile dreptei GE cu dreapta Δ respectiv Δ'. Prin D și D' se duc la BE și $B'E$ paralele care întîlnesc dreptele GB și GB' în Q respectiv Q', puncte prin care trece axa neutră Δ_E.

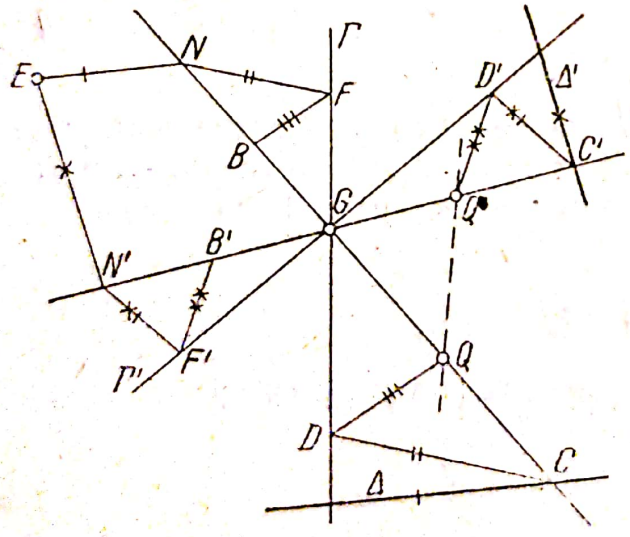

Fig. 3.6

— In caz cînd unul sau amîndouă punctele Q, Q' ies din cadrul figurii, indicăm următoarele căi pentru determinarea eforturilor unitare.

— Putem alege alte puncte arbitrare B_1, B_1', cărora le determinăm după metoda indicată dreptele reciproce Δ_1 și

Δ_1' și apoi pornind cu (dr Δ_1, Δ_1'; B_1, B_1') determinăm pe Δ_E. Menționăm că dreptele Δ_1 și Δ_1', reciprocele lui B_1, B_1' se determină folosind (dr Δ, Δ'; B, B') care sînt date.

Uneori nu este nevoie să determinăm decît dreapta Δ_1 reciproca unui punct oarecare B_1, iar din primele drepte Δ, Δ' și punctele lor reciproce B și B', luăm numai o dreaptă și reciprocul său, de exemplu (dr Δ, B). In acest caz, pornind cu (dr Δ, Δ_1; B, B_1) s-ar putea ca punctele Q și Q_1 să cadă în cadrul figurii.

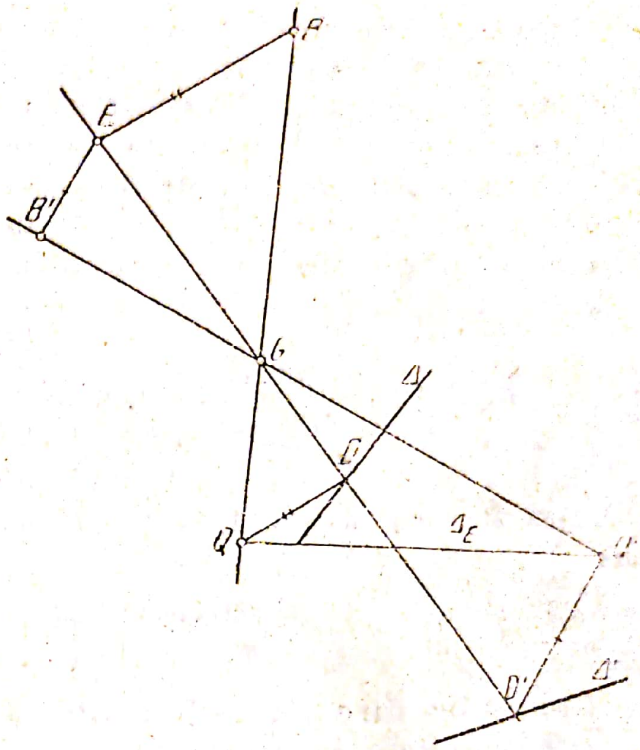

Fig. 3.7

— Secțiunea fiind solicitată în E de o forță N, se consideră solicitată de un sistem echivalent compus dintr-o forță axială N și un moment $M=N\cdot\overline{GE}$ dirijat după normala la EG. Vom lua un alt punct E' pe dreapta GE, astfel ca axa neutră corespunzătoare acestuia să întîlnească dreptele GB și GB' în cadrul figurii. In punctul E' considerăm o forță N' determinată de relația $N'\cdot\overline{GE'}=N\cdot\overline{GE}$ și notăm cu σ' efortul unitar într-un punct oarecare al secțiunii, în cazul cînd aceasta este solicitată în E' de forța N'. In acest caz, efortul unitar σ în același punct, cînd secțiunea este solicitată în E de forța N, este dat de:

$$\sigma=\sigma'+\frac{N-N'}{A}. \tag{3.5}$$

— In cele ce urmează vom arăta și alte construcții, care permit să determinăm alte puncte ale axei neutre Δ_E în cadrul figurii.

b) **Cazul cînd punctul de aplicare al forței este la infinit.** In acest caz, secțiunea este solicitată de un moment M

al cărui vector este normal pe direcția în care se găsește punctul la infinit.

Efortul unitar σ într-un punct oarecare al secțiunii, în caz că se cunoaște axa neutră, se calculează cu formula (1.27), deci și în acest caz se pune problema determinării axei neutre, problemă pe care o vom rezolva analitic și grafic.

Analitic. Axa neutră trece prin centrul de greutate G, deci trebuie să-i determinăm direcția. În acest caz, punctele Q, Q' nu pot servi la determinarea axei neutre deoarece ele se confundă cu G. Notăm cu m coeficientul unghiular al direcției normale pe moment (aceasta este direcția în care punctul E de aplicare al forței tinde către infinit) și cu m_1 coeficientul unghiular al axei neutre. Folosind formulele (3.4), obținem:

$$m_1 = \lim_{E\to\infty} \frac{y_Q - y_{Q'}}{x_Q - x_{Q'}} = \lim_{E\to\infty} \frac{\dfrac{\eta(y_1-b)}{\eta-b} - \dfrac{\xi y_2 - \eta a}{\xi - a}}{\dfrac{\eta x_1 - \xi b}{\eta - b} - \dfrac{\xi(x_2-a)}{\xi-a}}.$$

Când $E\to\infty$, avem $\lim \frac{b}{a} = m$ și cu aceasta rezultă relația:

$$m_1 = \frac{m\xi(y_2-\eta) - \eta(y_1-\eta)}{m\xi(x_2-\xi) - \eta(x_1-\xi)}, \tag{3.6}$$

care determină direcția axei neutre.

Grafic. Luăm pe normala dusă din G pe direcția momentului (așa cum am arătat în cap. I, § 4) un punct E în care considerăm forța $N = \frac{M}{\overline{GE}}$. Determinăm axa neutră Δ_E corespunzătoare punctului E, iar axa neutră Δ_M corespunzătoare momentului va trece prin G, fiind paralelă cu Δ_E.

2. Metoda a II-a

Uneori este necesar să găsim și alte puncte ale axei neutre, deoarece se poate întîmpla ca unul sau chiar amîndouă punctele Q, Q' să fie sau prea apropiate sau inaccesibile, astfel încît axa neutră să nu poată fi trasată destul de precis, sau chiar de loc. În cele ce urmează, vom arăta cum se găsesc alte puncte ale axei neutre.

a) **Punctul de aplicare al forței este la distanță finită.** *Analitic.* Considerăm aceleași date ca în cazul precedent, și anume centrul de greutate $G(\xi, \eta)$ și $(\mathrm{dr}\,\Delta, \Delta'; B, B')$, în aceeași ipoteză că dreptele Δ și Δ' nu trec nici una prin G. Vom lua ca axe de coordonate chiar dreptele Δ și Δ' (fig. 3.8).

Notăm cu P și P' respectiv punctele reciproce ale dreptelor EB și EB'. Rezultă că punctul P se găsește pe axa Δ și P' pe Δ', iar dreapta PP' este chiar axa neutră Δ_E, corespunzătoare lui E.

Punctul P este determinat prin abscisa sa x_P, iar P' prin ordonata sa $y_{P'}$. Notăm cu x_j, y_j coordonatele unui punct în

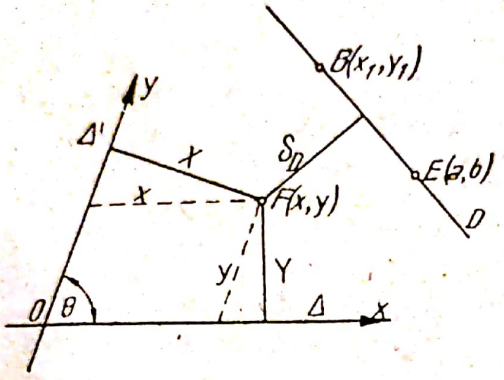

Fig. 3.8

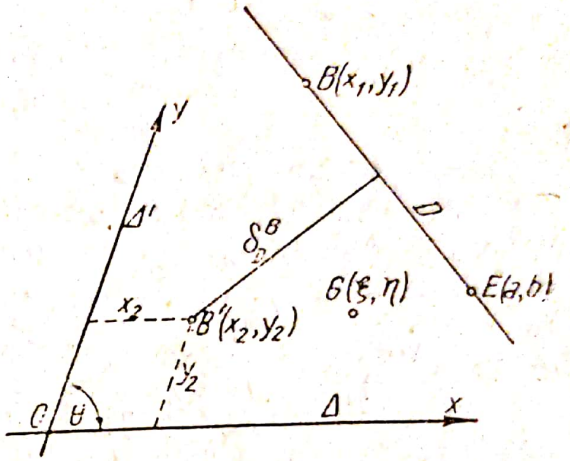

Fig. 3.9

raport cu axele de coordonate și cu X_j, Y_j distanțele de la acel punct la axe. In acest caz, X_P este distanța de la P la y și $Y_{P'}$ distanța de la P' la axa x. Să determinăm întîi poziția punctului P.

Dreapta EB, pe care o notăm cu D, are ecuația:

$$D;\quad (y-y_1)(x_1-a)-(x-x_1)(y_1-b)=0.$$

Fie $F(x, y)$ (fig. 3.8) un punct curent al secțiunii date; notînd cu X, Y, δ_D respectiv distanțele de la F la axele de coordonate și la dreapta D, distanța de la P la y o găsim aplicînd formula (1.25) și, deoarece (dr D, P), obținem:

$$X_P=\frac{\int X\,\delta_D\,dA}{A\,d_D}, \tag{3.7}$$

unde X și δ_D variază cu poziția punctului F în interiorul secțiunii, iar d_D este distanța de la centrul de greutate G la dreapta D. Ținînd seama de ecuația dreptei D, avem:

$$\delta_D=\frac{[(y-y_1)(x_1-a)-(x-x_1)(y_1-b)]\sin\theta}{\overline{EB}},$$

$$d_D=\frac{[(\eta-y_1)(x_1-a)-(\xi-x_1)(y_1-b)]\sin\theta}{\overline{EB}},$$

și, înlocuind în (3.7) valoarea lui δ_D și $X = x \sin\theta$, obținem:

$$X_P = \frac{\int [(y-y_1)(x_1-a)-(x-x_1)(y_1-b)]\, x \sin^2\theta\, dA}{Ad_D \overline{EB}} =$$

$$= \frac{(x_1-a)\sin^2\theta \int xydA}{Ad_D \overline{EB}} - \frac{(y_1-b)\sin^2\theta \int x^2 dA}{Ad_D \overline{EB}} +$$

$$+ \frac{[x_1(y_1-b)-y_1(x_1-a)]\sin^2\theta \int xdA}{Ad_D \overline{EB}}. \qquad (3.8)$$

Dacă ținem seama de formulele (3.1), aplicate pentru punctul $B'(x_2, y_2)$ care se găsește la distanțele X_2, Y_2 de axe și dacă notăm cu d_Δ, $d_{\Delta'}$ ca și în cazul precedent, distanțele de la G la Δ și Δ', obținem:

$$\frac{\int xydA}{Ad_D \overline{EB}} = \frac{\int XYdA}{Ad_D \overline{EB}\sin^2\theta} = \frac{Y_2 d_{\Delta'}}{d_D \overline{EB}\sin^2\theta} = \frac{y_2 d_{\Delta'}}{d_D \overline{EB}\sin\theta};$$

$$\frac{\int x^2 dA}{Ad_D \overline{EB}} = \frac{\int X^2 dA}{Ad_D \overline{EB}\sin^2\theta} = \frac{X_2 d_{\Delta'}}{d_D \overline{EB}\sin^2\theta} = \frac{x_2 d_{\Delta'}}{d_D \overline{EB}\sin^2\theta};$$

$$\frac{\int xdA}{Ad_D \overline{EB}} = \frac{\int XdA}{Ad_D \overline{EB}\sin\theta} = \frac{d_{\Delta'}}{d_D \overline{EB}\sin\theta}$$

și, înlocuind aceste valori în expresia (3.8) a lui X_P, rezultă:

$$X_P = \frac{[(x_1-a)y_2-(y_1-b)x_2+x_1(y_1-b)-y_1(x_1-a)]\, d_{\Delta'}\sin\theta}{d_D \overline{EB}}. \qquad (3.9)$$

Notînd cu $\delta_D^{B'}$ distanța de la punctul B' la dreapta D, avem:

$$\delta_D^{B'} = \frac{[(x_1-a)y_2-(y_1-b)x_2+x_1(y_1-b)-y_1(x_1-a)]\sin\theta}{\overline{EB}}, \qquad (3.10)$$

cu care, din (3.9), găsim expresia lui X_P. Tot astfel cum am determinat punctul P prin X_P (distanța de la P la axa y), vom determina și punctul P' prin $Y_{P'}$ (distanța de la P' la axa x).

Astfel se obțin următoarele formule:

$$X_P = \frac{\delta_D^{B'} d_{\Delta'}}{d_D}, \quad Y_{P'} = \frac{\delta_{D'}^{B} d_{\Delta}}{d_{D'}} \qquad (3.11)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\delta_{D'}^{B}$ este distanța de la B la dreapta D', care trece prin punctele E și B', iar $d_{D'}$ distanța de la G la dreapta D'.

Formulele (3.11) pot fi scrise și astfel:

$$x_P = \frac{\xi\,\delta_D^{B'}}{d_D}, \quad y_{P'} = \frac{\eta\,\delta_{D'}^{B}}{d_{D'}}, \tag{3.12}$$

astfel încît, pentru a găsi punctele P, P' și deci pentru a determina axa neutră Δ_E, putem folosi fie formulele (3.11) fie (3.12).

Grafic. Vom arăta la fel, întîi construcții grafice pentru punctul P.

Ducem, (fig. 3.10) prin G o dreaptă arbitrară Γ, care intersectează dreapta EB în punctul F și paralela dusă

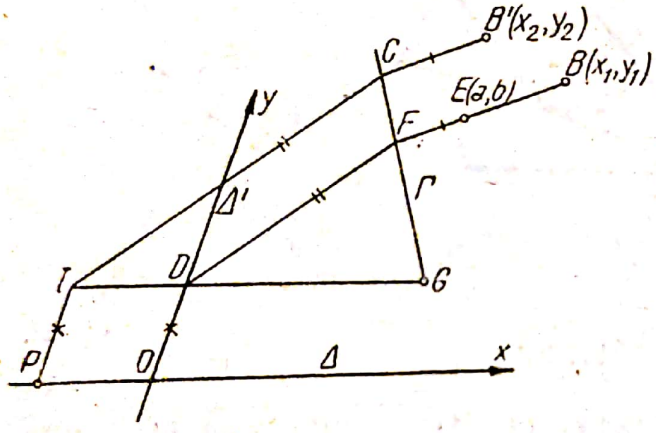

Fig. 3.10

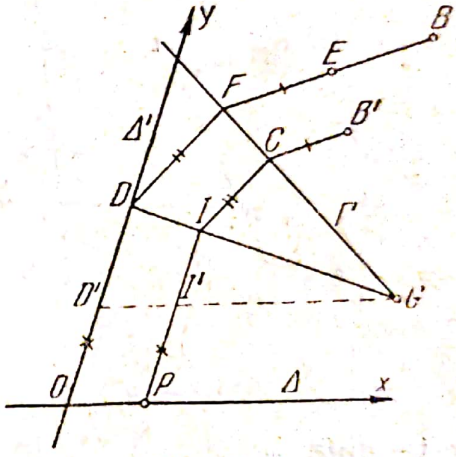

Fig. 3.11

prin B' la EB în C. Prin G ducem o paralelă la axa x, care întîlnește pe y în D. Fie I punctul de intersecție dintre GD și paralela dusă prin C la FD. Din I se duce o paralelă la y, care întîlnește axa x în punctul P căutat.

Demonstrația rezultă imediat, căci considerînd dreapta FD paralelă la latura IC în triunghiul GCI, putem scrie:

$X_P = \overline{OP} = \overline{ID} = \frac{\overline{GD}}{\overline{GF}}\,\overline{FC} = \frac{\xi\,\delta_D^{B'}}{d_D}$, care este valoarea lui x_P dată de (3.12).

Construcția precedentă conduce la o altă variantă, în care dreapta GD poate fi dusă arbitrar. Ea este dată în fig. 3.11 și se face la fel ca cea din fig. 3.10, cu deosebirea că dreapta GD este oarecare.

Demonstrația se face astfel: ducem o paralelă din G la axa x, care întîlnește pe y în D' și paralela IP la axa y în I'.

Scanned with OKEN Scanner

Obținem:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{ID}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{I'D'}}{\overline{D'G'}},$$

de unde se scoate $\overline{I'D'} = \overline{OP} = x_P$.

Acum putem, ținînd seamă de cele arătate, să găsim prin construcțiile grafice indicate, punctele P și P'. Construcția

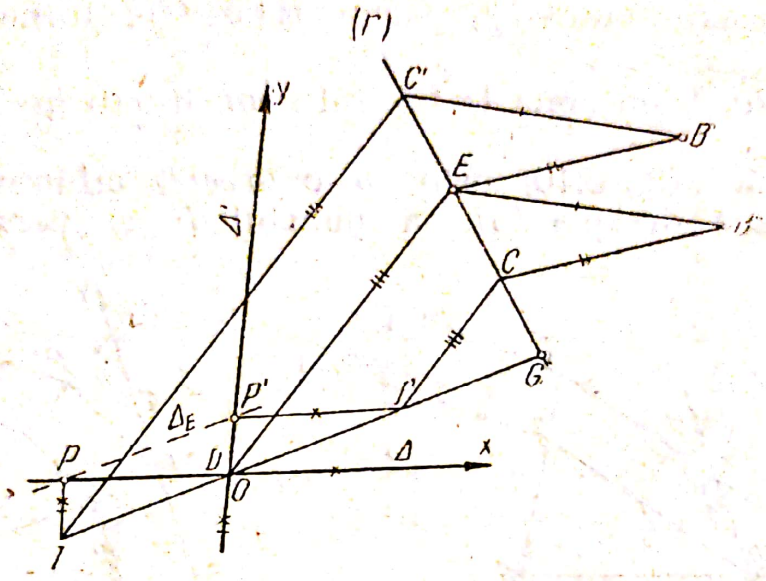

Fig. 3.12

este dată în fig. 3.12, în care, pentru a nu avea prea multe linii de construcție, am dus dreapta arbitrară Γ chiar prin punctul E și dreapta arbitrară GD prin origine.

b) **Punctul de aplicare al forței este la infinit.** *Analitic.* In acest caz, punctul E se găsește la infinit pe o direcție m' normală pe direcția momentului de coeficient unghiular m. Din cauză că punctele P și P' sînt distincte și în cazul momentului, formulele (3.11) și (3.12) sînt valabile. Dreptele EB și EB' (notate anterior cu D și D') sînt paralele și se obțin ducînd prin punctele B și B' paralele la o direcție normală pe moment. Rezultă atunci că $\delta_D^{B'} = \delta_{D'}^{B}$, iar coeficientul unghiular m_1 al axei neutre este:

$$m_1 = -\frac{y_{P'}}{x_P} = -\frac{\eta}{\xi} \cdot \frac{d_D}{d_{D'}}, \qquad (3.13)$$

iar ea trece și prin centrul de greutate G.

Formula (3.13) poate fi folosită și pentru determinarea direcției axei neutre în cazul cînd punctul de aplicare al

forței este la distanță finită. Intr-adevăr, dacă E se mișcă pe EG (fig. 3.13), axa neutră Δ_E se deplasează paralel cu ea. Deci, considerăm pe E la infinit pe direcția GE și prin B și B' ducem dreptele D_1 respectiv D_2 paralele cu GE. Dacă notăm cu d_{D_1} și d_{D_2} distanțele de la G la cele două drepte, direcția axei neutre Δ_E este definită prin coeficientul unghiular m_1 dat de relația:

$$m_1 = -\frac{\eta}{\xi} \cdot \frac{d_{D_1}}{d_{D_2}}. \qquad (3.13')$$

In general, axele de coordonate putînd fi oblice, coeficientul unghiular m_1 dat de formulele (3.13) și (3.13') este coeficientul lui x din ecuația $y = m_1 x + n_1$ a axei neutre.

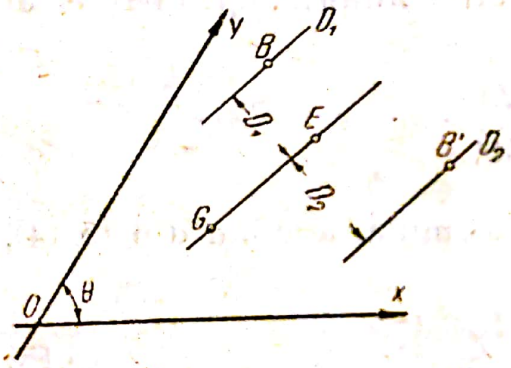

Fig. 3.13

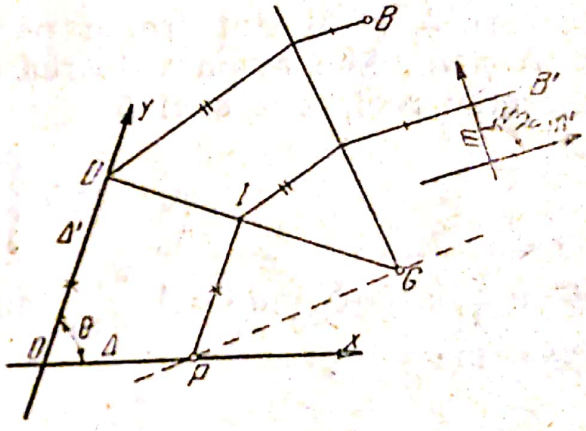

Fig. 3.14

Grafic. Grafic axa neutră se obține prin aceleași construcții ca cele din cazul studiat cînd E este la distanță finită, cu deosebirea că dreptele BE și $B'E$ se construiesc ducînd paralele la direcția m' normală pe vectorul moment. Construcția este arătată în fig. 3.14.

B. DETERMINAREA EFORTURILOR UNITARE CÎND SE DAU DOUĂ DREPTE, DINTRE CARE UNA TRECE PRIN G ȘI PUNCTELE LOR RECIPROCE

Vom trata problema numai în cazul cînd punctul de aplicare al forței este la distanță finită, cazul momentului deducîndu-se ușor din acesta.

Dîndu-se dreapta Δ, care trece prin centrul G de greutate al secțiunii și are ca reciproc o direcție m și dreapta Δ'

care nu trece prin G și are ca reciproc punctul B', se cere să se determine axa neutră Δ_E corespunzătoare punctului E. Rezolvarea problemei va fi făcută analitic și grafic:

Analitic. Vom determina punctele Q, Q', P, P' pe axa neutră. Formulele (3.4) și (3.11), respectiv (3.12), nu se mai pot aplica decît pentru Q' și P.

Să determinăm și punctele Q și P'.

Aplicînd formulele (1.25), obținem (θ fiind unghiul dintre Δ și Δ'):

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_Q}{\sin\theta} &= \frac{I_{y\Delta_1}}{Ad_{\Delta_1}} = \frac{\int x(y-b)\,dA}{Ad_{\Delta_1}} = \frac{\int xy\,dA - b\int x\,dA}{Ad_{\Delta_1}} \\ \frac{y_{Q'}}{\sin\theta} &= \frac{I_{x\Delta_1'}}{Ad_{\Delta_1'}} = \frac{\int y(x-a)\,dA}{Ad_{\Delta_1'}} = \frac{\int xy\,dA - a\int y\,dA}{Ad_{\Delta_1'}}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.14)$$

în care Δ_1 și Δ_1' sînt drepte paralele duse prin E respectiv la Δ și Δ'. Mai avem valoarea coeficientului unghiular m al direcției reciproce axei Δ:

$$m = \frac{\int y^2 dA}{\int xy dA}$$

și cu $\int y dA = 0$, $\int x dA = A\,\frac{d_{\Delta'}}{\sin\theta}$ din formula a doua din (3.14), scoatem:

$$\int xy dA = A\,\frac{y_{Q'} d_{\Delta_1'}}{\sin\theta}. \qquad (3.15)$$

Ținînd seamă de ultimele relații, centrul de greutate fiind $G(\xi, 0)$, prima formulă din (3.14) devine:

$$x_Q = \frac{y_{Q'} d_{\Delta_1'} - b d_{\Delta'}}{d_{\Delta_1}},$$

însă din (3.4) scoatem $y_{Q'} = \frac{\xi y_2}{\xi - a}$ și obținem:

$$x_Q = \frac{\xi(b-y_2)}{b}.$$

Punctul Q este pe dreapta L (fig. 3.15) de ecuație $y = m(x-\xi)$ astfel încît:

$$y_Q = m\left[\frac{\xi(b-y_2)}{b} - \xi\right] = -\frac{m\xi y_2}{b}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ordonata punctului P' este dată în formulele (3.11) sau (3.12) care, în acest caz, devine nedeterminată.

Astfel, punctele Q, Q', P, P' sînt definite de relaţiile:

$$x_Q = \frac{\xi(b-y_2)}{b}; \quad y_Q = -\frac{m\xi y_2}{b}$$

$$x_{Q'} = \frac{\xi(x_2-a)}{\xi-a}; \quad y_{Q'} = \frac{\xi y_2}{\xi-a} \qquad (3.16)$$

$$x_P = \frac{\xi\delta_D^{B'}}{d_D}; \quad y_{P'} = \frac{\xi y_2 [m(x_2-a) - (y_2-b)\sin\theta}{d_{D'}\overline{B'E}}.$$

Pentru a avea axa neutră Δ_E este necesar să se determine numai două puncte, celelalte putînd folosi pentru verificarea exactităţii construcţiilor făcute. (In formulele stabilite se va ţine seama de semn).

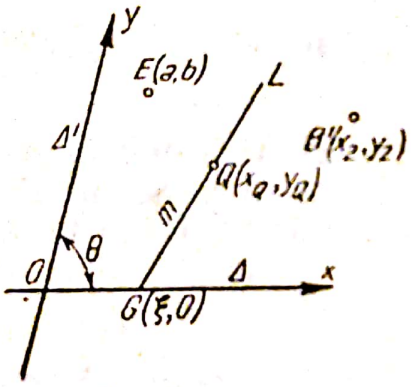

Fig. 3.15

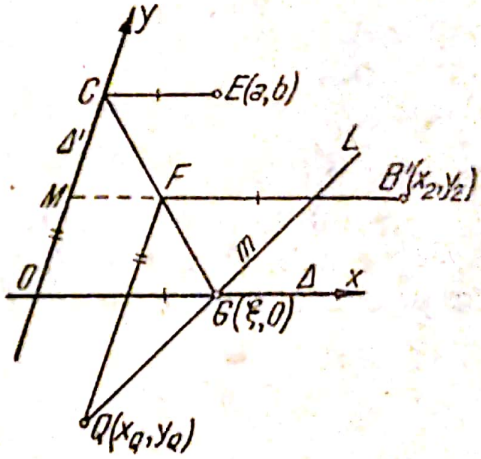

Fig. 3.16

Grafic. Vom arăta cum se determină grafic punctele Q, Q' şi P.

Pentru a găsi pe Q procedăm astfel (fig. 3.16): ducem din E o paralelă la Δ pînă întîlneşte pe Δ' în C; paralela dusă din B' la Δ intersectează pe GC în F. Punctul Q căutat este la intersecţia dreptei L cu paralela dusă prin F la axa y. Demonstraţia rezultă imediat, deoarece după figură avem:

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{OC}},$$

proporţie din care se scoate $x_Q = \overline{MF}$ şi se regăseşte valoarea lui x_Q dată de relaţia (3.16).

Construcţia grafică pentru determinarea punctului Q' este dată în fig. 3.17. Prin E se duce o paralelă la Δ' care inter-

sectează pe Δ în F. Paralela dusă prin O la dreapta $B'F$ întîlnește dreapta GB' în punctul Q'. Vom avea:

$$\frac{\overline{OQ'}}{\overline{FB'}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{FG}} = \frac{\xi}{\xi - a},$$

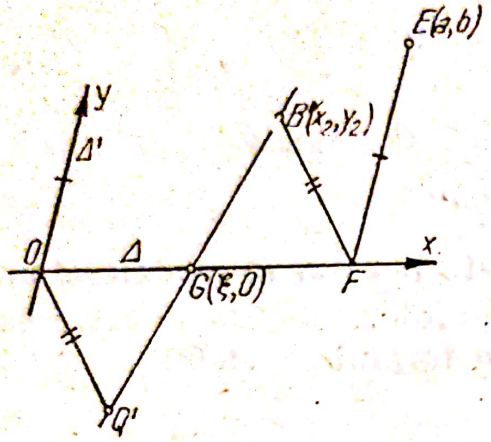

Fig. 3.17

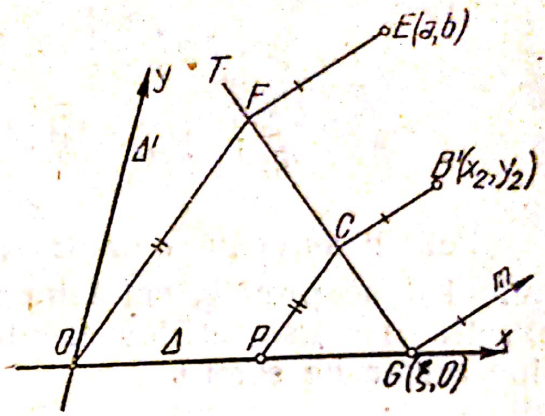

Fig. 3.18

și cu $\frac{\overline{OQ'}}{\overline{FB'}} = \frac{y_{Q'}}{y_2}$ se deduce $y_{Q'}$ găsindu-se expresia dată de relația (3.16).

— Punctul P se determină astfel (fig. 3.18): ducem prin G dreapta arbitrară GT, care este intersectată în punctele C și F de paralelele duse prin B' și E la direcția m. Paralela dusă

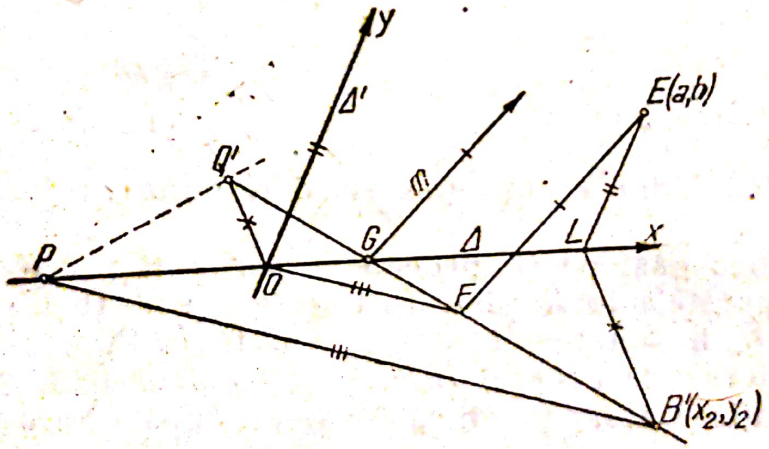

Fig. 3.19

prin C la OF întîlnește axa xx' în punctul P. Construcția aceasta se bazează pe cea arătată în fig. 3.10.

— In fig. 3.19 se dă construcția grafică pentru aflarea punctelor P și Q' care determină axa neutră Δ_E corespunză-

toare punctului E. Această construcție grafică s-a făcut pe baza fig. 3.17 și 3.18. Ea se realizează astfel: se duc prin E paralele la Δ' și la direcția m; acestea intersectează pe Δ și pe GB' în L respectiv F. Paralelele duse prin O și B' la LB' respectiv OF întîlnesc (fig. 3.19) dreptele GB' și Δ în punctele Q' și P căutate.

— Din cele expuse rezultă următoarea concluzie: într-o secțiune care are o axă de simetrie Δ, solicitată de o forță excentrică sau de un moment, determinarea eforturilor unitare nu mai necesită decît cunoașterea unei drepte Δ' și a punctului ei reciproc B', cu condiția ca Δ' să nu fie perpendiculară pe Δ.

§ 2. DETERMINAREA EFORTURILOR UNITARE PRIN INVOLUȚIE, CÎND SE DAU DOUĂ DREPTE ȘI PUNCTELE LOR RECIPROCE

In paragraful precedent am tratat prin procedee analitice și grafice problema determinării axei neutre, atunci cînd cunoaștem două drepte și reciprocele lor, folosind relațiile care determină poziția punctului de aplicare al forței. Vom trata acum aceeași problemă, utilizînd proprietățile involuției și vom vedea că putem determina și alte puncte ale axei neutre, în afară de cele găsite anterior.

1. Metoda I.

Se dă în planul secțiunii A, dreptele Δ și Δ' (fig. 3.20) (dintre care una poate trece prin centrul de greutate G al secțiunii) și reciprocele lor B și B'. Cunoscînd pe E, punctul de aplicare al forței, să determinăm axa neutră corespunzătoare acestuia.

Unim punctul G cu B, B', E și ducem prin G un cerc oarecare C, care intersectează dreptele GB, GB', GE respectiv în B_1, B_2, B_3, iar paralelele duse prin G la Δ și Δ' în B'_1 respectiv B'_2.

Se formează astfel două fascicule în involuție GB_i și GB'_i, definite de perechile de raze conjugate: (GB_1, GB'_1), (GB_2, GB'_2).

Centrul de involuție T al celor două fascicule se găsește la intersecția dreptelor $B_1B'_1$, $B_2B'_2$.

Dreapta GE este o rază într-unul din cele două fascicule în involuție. Omoloaga lui GE este dreapta GB'_3, unde B'_3 este

Scanned with OKEN Scanner

punctul de intersecție al cercului cu dreapta B_3T. Axa neutră Δ_E, corespunzătoare punctului E, este paralelă cu GB'_3.

Incă un punct P' al dreptei Δ_E este reciprocul dreptei EB', care se găsește și pe Δ'; pentru a găsi punctul P', vom determina raza omoloagă a dreptei GB'_4 dusă prin G paralelă cu EB'. Omoloaga lui GB'_4 este GB_4 care se obține prin procedeul general, folosind centrul de involuție T. Punctul P

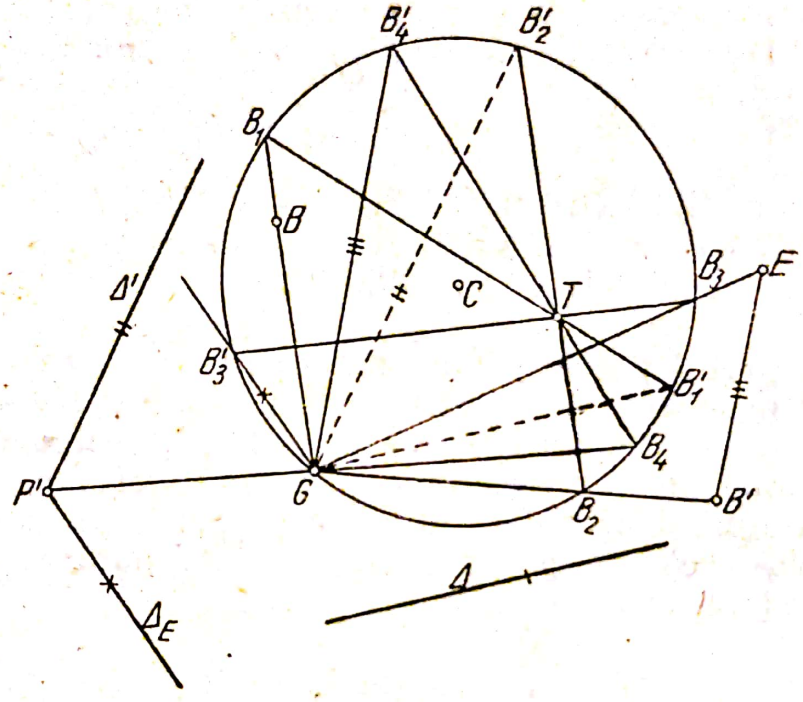

Fig. 3.20

este la intersecția dreptei GB_4 cu axa Δ', iar axa neutră Δ_E se obține ducînd prin P' o paralelă la dreapta GB'_3. Dacă punctul P' este în afara cadrului figurii, sau dacă voim să facem o verificare a construcției, vom determina un punct P al axei neutre Δ_E, care este situat pe axa Δ și este reciprocul lui EB. Acesta se găsește în același fel ca și punctul P'.

Facem observația că, în cazul cînd nu putem determina punctul T, problema nu poate fi tratată prin această metodă. Aceasta se întîmplă cînd dreptele $B_1B'_1$ și $B_2B'_2$ sînt confundate, adică atunci cînd punctele B și B' sînt respectiv pe dreptele paralele duse din G la Δ' și Δ. In acest caz, vom folosi una din metodele expuse anterior, sau vom căuta alte figuri reciproce. (Un exemplu este cazul paralelogramului, cînd luăm ca Δ și Δ' două laturi adiacente).

Scanned with OKEN Scanner

— In cazul solicitării secțiunii prin moment (fig. 3.21), determinarea axei neutre Δ_M se face mai simplu, deoarece ea trece prin G, astfel că nu mai este nevoie să aflăm punctul P'.

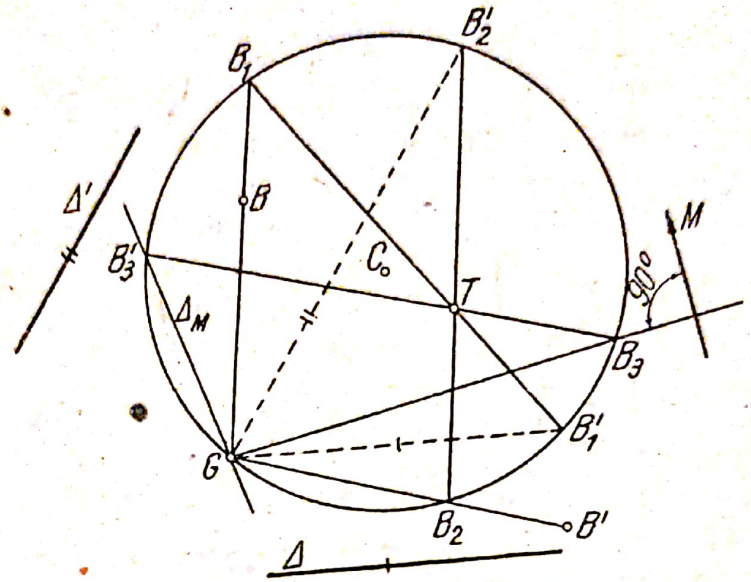

Fig. 3.21

La construcția grafică, vom ține seama că punctul E este la infinit pe o direcție perpendiculară pe direcția momentului. A uni în acest caz un punct la distanța finită cu E revine la a duce prin acest punct o paralelă la direcția care definește pe E.

2. Metoda a II-a

Cu aceleași date ca la metoda I ne propunem să determinăm axa neutră Δ_E, prin direcția sa și printr-un punct situat pe dreapta BB'.

Am văzut în cap. I, § 6, punctul B că, fiind date dreptele Δ, Δ' și reciprocele lor B, B', în punctul de intersecție O al acestor drepte, avem două fascicule în involuție OB_i, OB'_i definite de perechile de raze omoloage (Δ, OB), (Δ', OB').

Punctele B_i, B'_i sînt pe dreapta BB', iar ca figuri reciproce avem (dr OB_i, B'_i), (dr OB'_i, B_i). Vom duce un cerc oarecare C prin punctul O de intersecție al dreptelor Δ, Δ' (fig. 3.22) și aflăm punctele de intersecție F_1, F_2, F'_1, F'_2 ale cercului respectiv cu dreptele OB, OB', Δ, Δ'; centrul de involuție T este determinat prin intersecția dreptelor

F_1F_1', F_2F_2'. Cu ajutorul lui T vom afla întîi direcția axei neutre Δ_E. Fie B_3 punctul de intersecție al dreptei GE cu BB'. Toate punctele dreptei GE au ca reciproce drepte paralele cu

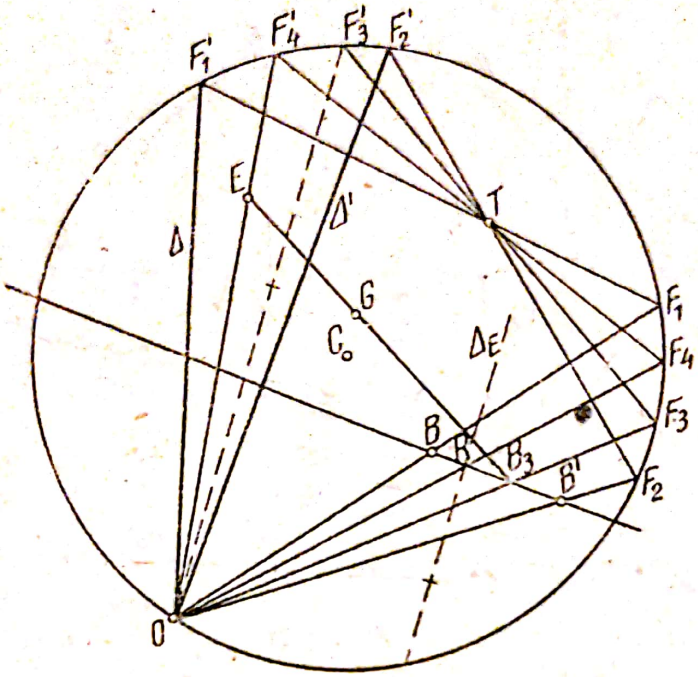

Fig. 3.22

Δ_E, deci reciproca punctului B_3 determină direcția dreptei Δ_E. Vom considera dreapta OB_3 în unul dintre cele două fascicule și vom afla raza sa omoloagă în celălalt fascicul. Raza omoloagă a lui OB_3 o găsim cu ajutorul centrului de involuție T și este dreapta OF_3'. Evident că, după cele spuse anterior, dreapta reciprocă a punctului B_3 va fi tocmai OF_3', care este paralelă cu Δ_E

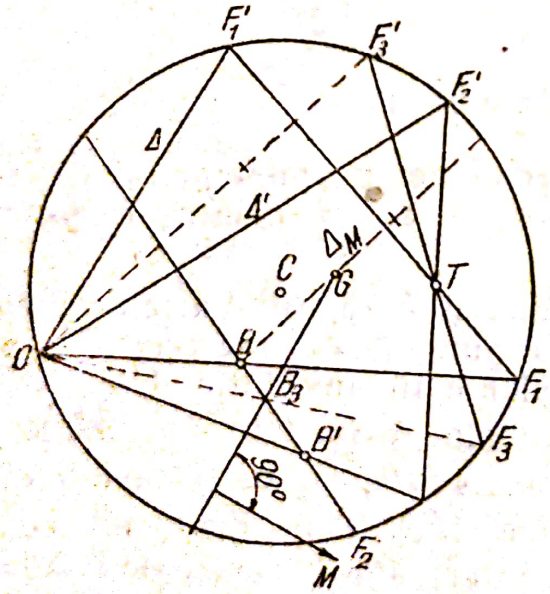

Fig. 3.23

Pentru determinarea dreptei Δ_E mai trebuie să găsim un punct al ei. Pentru aceasta, considerăm dreapta OE ca rază în unul dintre cele două fascicule în involuție și-i determinăm raza omoloagă în celălalt fascicul,

care este OF_4. Astfel, în baza celor subliniate la început, rezultă că punctul reciproc al dreptei OE este punctul R de la intersecția dreptei OF_4 cu BB', punct care este situat și pe Δ_E. Deci, axa neutră Δ_E se obține ducînd prin punctul R o paralelă la dreapta OF_3'.

— In același fel (fig. 3.23) se tratează și cazul cînd secțiunea este solicitată de un moment, problema fiind asemănătoare celei făcute mai sus în cadrul metodei I.

Cu aceasta ne mărginim la construcțiile grafice date, deoarece ele rezolvă complet problema propusă în acest capitol.

§ 3. DETERMINAREA EFORTURILOR UNITARE PRIN METODA TRANSFORMĂRILOR

Prin transformare vom înțelege calculul unei secțiuni cu ajutorul alteia, dedusă din prima cu ajutorul unor relații, acestea putînd fi alge rice sau traduse geometric.

Transformarea unei secțiuni poate fi făcută și în alt plan, diferit de al secțiunii date, transformata putînd fi însă adusă în același plan cu aceea de la care s-a pornit, prin mișcare de translație și rotație.

Distingem două feluri de transformări, și anume:

— transformări de speța I sau transformări complete, acelea care nu depind de forma secțiunii;

— transformări de speța a II-a, care depind de forma secțiunii. In cele ce urmează, ne vom ocupa numai de transformări de prima speță, celelalte fiind utilizate numai în cazuri particulare. (De exemplu, sîmburele central).

A. METODA ANALITICĂ

1. Determinarea relațiilor de transformare

Să considerăm o secțiune A din plan, pe care s-o transformăm în altă secțiune A' în același plan. Condițiile necesare și suficiente pe care trebuie să le îndeplinească în acest caz o transformare completă sînt următoarele:

1. Intre punctele secțiunii A și ale secțiunii A' trebuie să existe o corespondență biunivocă (anume, fiecărui punct (x, y) din secțiunea A, trebuie să-i corespundă cîte un singur punct (x', y') în secțiunea A' și invers).

2. Intre dreptele aparținînd secțiunii A și dreptele aparținînd secțiunii A' trebuie să existe o corespondență biunivocă

Scanned with OKEN Scanner

(anume fiecărei drepte D a secțiunii A trebuie să-i corespundă cîte o dreaptă D' a secțiunii A' și invers).

3. Între punctele P_i și P_i' reciprocele dreptelor D_i și D_i' din secțiunile A respectiv A', trebuie să existe de asemenea o corespondență biunivocă.

4. Transformarea nu trebuie să depindă de forma secțiunii. Vom considera transformarea punctelor (x, y) ale secțiunii A în punctele (x', y') ale secțiunii A', dată de relațiile:

$$x=\varphi(x', y'); \quad y=\psi(x', y'), \tag{3.17}$$

unde vom determina funcțiile φ și ψ astfel încît toate condițiile de mai sus să fie îndeplinite.

Conform condiției 2, unei drepte D aferentă secțiunii A, de ecuație $ax+by+c=0$, trebuie să-i corespundă o dreaptă D' aferentă secțiunii A' de ecuație $mx'+ny'+p=0$, deci trebuie să existe identitatea:

$$\lambda(x', y')[a\varphi(x', y')+b\psi(x', y')+c]\equiv mx'+ny'+p, \tag{3.18}$$

unde a, b, c sînt parametri arbitrari, iar λ o funcție de coordonatele x', y', care urmează de asemenea să fie determinată.

Pentru $a=b=0$ avem în secțiunea A dreapta de la infinit și din relația (3.18) găsim:

$$\lambda(x', y')=\alpha_3x'+\beta_3y'+\gamma_3. \tag{3.19}$$

Dacă în relația (3.18) facem întîi $c=b=0$ și apoi $a=c=0$, ținînd seama de expresia lui λ dată de (3.19) găsim:

$$x=\varphi(x', y')=\frac{\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1}{\alpha_3x'+\beta_3y'+\gamma_3}; \quad y=\psi(x', y')=\frac{\alpha_2x'+\beta_2y'+\gamma_2}{\alpha_3x'+\beta_3y'+\gamma_3}. \tag{3.20}$$

Rezultă că formulele de transformare în care condițiile 1 și 2 sînt îndeplinite au forma:

$$x=\frac{\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1}{\alpha_3x'+\beta_3y'+\gamma_3}; \quad y=\frac{\alpha_2x'+\beta_2y'+\gamma_2}{\alpha_3x'+\beta_3y'+\gamma_3}, \tag{3.21}$$

care arată că între punctele (x, y), (x', y') există o transformare proiectivă.

Să punem acum condițiile ca formulele (3.21) să îndeplinească și condițiile 3 și 4.

Considerăm dreapta D de ecuație $ax+by+c=0$ și $P(x_0, y_0)$ punctul ei reciproc în raport cu secțiunea A. Coordonatele lui P sînt (conform formulelor 1.25):

$$x_0=\frac{\iint_A x(ax+by+c)\,dxdy}{\iint_A (ax+by+c)\,dxdy}; \quad y_0=\frac{\iint_A y(ax+by+c)\,dxdy}{\iint_A (ax+by+c)\,dxdy}. \tag{3.22}$$

Punctul reciproc $P'(x_0', y_0')$ al dreptei D' de ecuație $mx'+ny'+p=0$, în raport cu secțiunea A', are coordonatele:

$$x_0' = \frac{\iint_{A'} x'(mx'+ny'+p)\,dx'dy'}{\iint_{A'} (mx'+ny'+p)\,dx'dy'}; \quad y_0' = \frac{\iint_{A'} y'(mx'+ny'+p)\,dx'dy'}{\iint_{A'} (mx'+ny'+p)\,dx'dy'}. \tag{3.23}$$

Dacă în relațiile (3.22) schimbăm variabilele x, y cu x', y' date de (3.20), obținem:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{\iint_{A'} \varphi(a\varphi+b\psi+c)\frac{D(x,y)}{D(x',y')}\,dx'dy'}{\iint_{A'}(a\varphi+b\psi+c)\frac{D(x,y)}{D(x',y')}\,dx'dy'} \\ y_0 &= \frac{\iint_{A'} \psi(a\varphi+b\psi+c)\frac{D(x,y)}{D(x',y')}\,dx'dy'}{\iint_{A'} (a\varphi+b\psi+c)\frac{D(x,y)}{D(x',y')}\,dx'dy'} \end{aligned}\right| \tag{3.24}$$

unde $\frac{D(x,y)}{D(x',y')} = \begin{vmatrix} \varphi_{x'}' & \varphi_{y'}' \\ \psi_{x'}' & \psi_{y'}' \end{vmatrix}$ este determinantul funcțional al lui $x=\varphi(x', y')$ și $y=\psi(x', y')$ în raport cu x' și y'.

Dacă în relațiile (3.23) ținem seamă de identitatea (3.18), obținem:

$$x_0' = \frac{\iint_{A'} x'\lambda(a\varphi+b\psi+c)\,dx'dy'}{\iint_{A'} \lambda(a\varphi+b\psi+c)\,dx'dy'}; \quad y_0' = \frac{\iint_{A'} y'\lambda(a\varphi+b\psi+c)\,dx'dy'}{\iint_{A'} \lambda(a\varphi+b\psi+c)\,dx'dy'}. \tag{3.25}$$

Între coordonatele x_0, y_0, și x_0', y_0' date de (3.24) și (3.25) trebuie să existe, conform condiției 3, relațiile:

$$x_0 = \frac{\alpha_1 x_0' + \beta_1 y_0' + \gamma_1}{\alpha_3 x_0' + \beta_3 y_0' + \gamma_3}; \quad y_0 = \frac{\alpha_2 x_0' + \beta_2 y_0' + \gamma_2}{\alpha_3 x_0' + \beta_3 y_0' + \gamma_3}. \tag{3.26}$$

Dacă în prima relație din (3.26) introducem valorile lui x_0, x_0', y_0' date de relațiile (3.24) și (3.25), obținem:

$$\frac{\iint_{A'} \varphi(a\varphi+b\psi+c)\frac{D(x,y)}{D'(x',y')}\,dx'dy'}{\iint_{A'}(a\varphi+b\psi+c)\frac{D(x,y)}{D(x',y')}\,dx'dy'} = \frac{\iint_{A'} \lambda(\alpha_1 x'+\beta_1 y'+\gamma_1)(a\varphi+b\psi+c)\,dx'dy'}{\iint_{A'} \lambda(\alpha_3 x'+\beta_3 y'+\gamma_3)(a\varphi+b\psi+c)\,dx'dy'},$$

Scanned with OKEN Scanner

sau încă, dacă ținem seama de relațiile (3.18) (3,19) și (3.20), condiția precedentă devine:

$$\frac{\iint\limits_{A'} \frac{\varphi}{\lambda}(mx'+ny'+p)\frac{D(x,y)}{D(x',y')}dx'dy'}{\iint\limits_{A'} \frac{1}{\lambda}(mx'+ny'+p)\frac{D(x,y)}{D(x',y')}dx'dy'} = \frac{\iint\limits_{A'} \lambda\varphi\,(mx'+ny'+p)\,dx'dy'}{\iint\limits_{A'} \lambda\,(mx'+ny'+p)\,dx'dy'}. \quad (3.27)$$

Relația (3.27) poate fi scrisă în felul următor:

$$\frac{\iint\limits_{A'} (\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1)(mx'+ny'+p)\frac{1}{\lambda^2}\frac{D(x,y)}{D(x',y')}dx'dy'}{\iint\limits_{A'} (\alpha_3x'+\beta_3y'+\gamma_3)(mx'+ny'+p)\frac{1}{\lambda^2}\frac{D(x,y)}{D(x',y')}dx'dy'} =$$

$$= \frac{\iint\limits_{A'} (\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1)(mx'+ny'+p)\,dx'dy'}{\iint\limits_{A'} (\alpha_3x'+\beta_3y'+\gamma_3)(mx'+ny'+p)\,dx'dy'}. \quad (3.27a)$$

Această relație permite determinarea condiției de transformare, prin aplicarea formulei mediei.

Se pornește de la integrala:

$$J=\iint\limits_D f(x,y)\,F(x,y)\,dxdy,$$

unde funcția $f(x,y)$ este mărginită iar funcția $F(x,y)$ păstrează același semn în domeniul D. Formula mediei este:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,F(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)\iint\limits_D F(x,y)\,dxdy,$$

unde $P(\xi,\eta)$ este un punct anumit al domeniului D.

Evident că punctul $P(\xi,\eta)$ are o anumită poziție care, atunci cînd f și F sînt fixe, variază cu domeniul, iar cînd domeniul este același, variază cu funcțiile f și F. In general, poziția lui $P(\xi,\eta)$ depinde deci și de domeniu și de funcțiile f și F.

Vom lua ca funcție $F(x,y)$ pentru numărătorul și numitorul funcției din membrul întîi al relației (3.27a) respectiv:

$$F_1(x,y)=(\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1)(mx'+ny'+p),$$

$$F_2(x,y)=(\alpha_3x'+\beta_3y'+\gamma_3)(mx'+ny'+p),$$

și vom admite ipoteza că F_1 și F_2 păstrează fiecare, același semn în domeniul A'. In cazul cel mai general, semnele funcțiilor F_1 și F_2 pot varia astfel încît, prin ipoteza făcută, vom găsi doar o condiție necesară a transformării (3.21).

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd formula mediei în membrul întîi al relației (3.27a), această relație devine:

$$\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{D(x,y)}{D(x',y')}\right)_{\substack{x'=\xi_1\\y'=\eta_1}} = \left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{D(x,y)}{D(x',y')}\right)_{\substack{x'=\xi_2\\y'=\eta_2}}.$$

Evident că domeniul A' fiind oarecare, cum $F_1 \neq F_2$ avem și $\xi_1 \neq \xi_2$, $\eta_1 \neq \eta_2$.

Rezultă că relația de condiție precedentă nu poate avea loc decît dacă:

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{D(x,y)}{D(x',y')} = \text{constant}. \tag{3.28}$$

Cum însă determinantul funcțional are valoarea:

$$\frac{D(x,y)}{D(x',y')} = \begin{vmatrix} \varphi'_{x'} & \varphi'_{y'} \\ \psi'_{x'} & \psi'_{y'} \end{vmatrix}$$

rezultă $\lambda =$ constant.

Pe de altă parte, dacă punem condiția ca a doua relație din (3.26) să fie satisfăcută și înlocuim în ea valorile lui y_0, x'_0, y'_0 date de relațiile (3.24) și (3.25), vom obține aceeași relație de condiție (3.28).

Deci condiția necesară pentru ca relațiile de transformare să îndeplinească și condițiile 3 și 4 este $\lambda =$ constant. Dacă punem $\lambda =$ constant în relația (3.27) și în cealaltă obținută în mod analog, vedem că ea este verificată, deci condiția este și suficientă.

Observație. Cele de mai sus se pot demonstra și geometric.

Se ia o secțiune triunghiulară ABC (orice secțiune se poate echivala cu o secțiune triunghiulară) și un punct O din spațiu, cu care se unesc vîrfurile triunghiului. Intersectînd razele de proiecție OA, OB, OC cu un plan oarecare P, se obține o secțiune $A'B'C'$. Se demonstrează că formulele analitice de transformare a secțiunii ABC în secțiunea $A'B'C'$ sînt de forma (3.21).

Să arătăm însă că transformarea secțiunii ABC în secțiunea $A'B'C'$, în acest mod, nu îndeplinește toate condițiile 1—4 cerute.

Evident că dreapta AB se transformă în $A'B'$ și reciprocul E al laturii AB în raport cu ABC este pe mediana CC_1 dusă din C, iar reciprocul E' al laturii $A'B'$ în raport cu $A'B'C'$ este pe mediana $C'C'_1$.

În general însă, mediana $C'C'_1$ nu este transformata lui CC_1, deci E' nu este transformatul lui E.

Rezultă atunci că transformarea (3.21) nu îndeplinește condițiile 1—4 decît dacă $\alpha_3 = \beta_3 = 0$. În acest caz, planul P este paralel cu ABC sau punctul O este la infinit. Deci relațiile de transformare care îndeplinesc toate condițiile cerute sînt transformările afine:

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1\,; \quad y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2. \tag{3.29}$$

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie remarcat că formulele de transformare (3.29) dau o transformare completă. Cum însă parametrii $\alpha_l, \beta_l, \gamma_l$ nu depind de forma secțiunii, această transformare este valabilă și pentru secțiunea activă.

Formulele de transformare (3.29) păstrează prin transformare paralelismul dreptelor. Prin această transformare, două drepte oarecare ale secțiunii A nu pot fi transformate în drepte paralele în secțiunea A'.

2. Determinarea eforturilor unitare

Să considerăm secțiunea A solicitată în punctul E de forța N iar secțiunea A' transformata lui A prin formulele (3.29), acționată în E' tot de forța N. Punctele E și E' corespund în cele două secțiuni. Fie două puncte de asemenea corespunzătoare, $F(x_1, y_1)$, $F'(x_1', y_1')$ ale secțiunilor A și A'.

Notînd cu σ, σ' eforturile unitare în punctele F și F' din cele două secțiuni, ne propunem să găsim relația dintre aceste eforturi.

Eforturile unitare σ, σ' sînt:

$$\sigma = \frac{N}{S} s, \quad \sigma' = \frac{N}{S'} s' \tag{3.30}$$

unde S și S' sînt momentele statice ale celor două secțiuni în raport cu axele neutre D, D', iar s și s' distanțele de la punctele F și F' respectiv la dreptele D, D'. Ecuațiile axelor neutre D, D' sînt:

$$D: \; ax+by+c=0, \quad D': \; mx'+ny'+p=0,$$

și, dacă mai notăm cu $G(\xi, \eta)$, $G'(\xi', \eta')$ centrele de greutate ale celor două secțiuni, avem:

$$S = A\frac{a\xi+b\eta+c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad S' = A'\frac{m\xi'+n\eta'+p}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

$$s = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad s' = \frac{mx_1'+ny_1'+p}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Ținînd seama de aceste relații, formulele (3.30) devin:

$$\sigma = \frac{N}{A}\frac{ax_1+by_1+c}{a\xi+b\eta+c}, \quad \sigma' = \frac{N}{A'}\frac{mx_1'+ny_1'+p}{m\xi'+n\eta'+p}. \tag{3.31}$$

În baza relațiilor de transformare (3.29), avem identitățile:

$$\left.\begin{aligned} ax_1+by_1+c &\equiv mx_1'+ny_1'+p \\ a\xi+b\eta+c &\equiv m\xi'+n\eta'+p. \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seamă de relațiile (3.31) și de identitățile (3.32), găsim:

$$\sigma = \sigma' \frac{A'}{A} \tag{3.33}$$

dar:

$$A = \iint_A dxdy = \iint_{A'} \frac{D(x, y)}{D(x', y')} dx'dy' = A' \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

și deci relația (3.33) devine:

$$\sigma = \frac{\sigma'}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}. \tag{3.34}$$

Formula (3.33) sau (3.34) ne dă posibilitatea să determinăm efortul unitar într-un punct al secțiunii A, cînd cunoaștem efortul unitar în punctul corespunzător al secțiunii A' și invers.

3. Transformări succesive

Uneori este nevoie să transformăm o secțiune A în alta A', pe care o transformăm în a treia A'' etc. Spunem că facem transformări succesive.

In două transformări succesive relațiile de transformare sînt:

— de la A la A':

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 \\ y &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 \end{aligned}\right\}; \tag{3.35}$$

— iar de la A' la A''

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1' x'' + \beta_1' y'' + \gamma_1' \\ y' &= \alpha_2' x'' + \beta_2' y'' + \gamma_2' \end{aligned}\right\}. \tag{3.35 a}$$

Fie punctele corespunzătoare F, F' în secțiunile A, A' și punctele corespunzătoare F', F'' respectiv în secțiunile A', A''. Evident că, în cazul cînd avem aceeași forță N în puncte corespunzătoare ale secțiunilor A, A', A'', între eforturile unitare σ, σ', σ'' din punctele F, F', F'' avem relațiile:

$$\sigma = \sigma' \frac{A'}{A}; \quad \sigma' = \sigma'' \frac{A''}{A'},$$

din care rezultă:

$$\sigma = \sigma'' \frac{A''}{A}; \tag{3.36}$$

se vede deci că putem transforma direct secțiunea A în secțiunea A''.

Dacă folosim relația (3.34) putem scrie legătura dintre σ și σ' prin:

$$\sigma = \frac{\sigma'}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}; \qquad \sigma' = \frac{\sigma''}{\begin{vmatrix} \alpha_1' & \beta_1' \\ \alpha_2' & \beta_2' \end{vmatrix}}$$

care dau:

$$\sigma = \frac{\sigma''}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1' & \beta_1' \\ \alpha_2' & \beta_2' \end{vmatrix}}. \tag{3.37}$$

B. METODA GEOMETRICĂ

Vom studia, pe cale geometrică, transformările complete. Transformările de speța I studiate analitic sînt date prin relații liniare, care se interpretează geometric prin proiecții, în care dreapta de la infinit nu se schimbă.

1. Proiecția ortogonală

Vom demonstra următoarea teoremă importantă:

Dacă într-un plan P, se dă o secțiune A, o dreaptă oarecare D și punctul reciproc E al dreptei D, în raport cu secțiunea A, și dacă A', D', E' sînt proiecțiile ortogonale ale secțiunii A, a dreptei D și a punctului E pe un plan oarecare Q, care face unghiul α cu planul P, iar un punct oarecare F al secțiunii A se proiectează ortogonal pe planul Q în F', avem următoarele:

1. Reciprocul dreptei D' în raport cu secțiunea A' este punctul E'.

2. Dacă σ și σ' sînt eforturile unitare în F și F', cînd cele două secțiuni A și A' sînt solicitate respectiv în punctele E și E' de aceeași forță N, rezultă:

$$\sigma = \sigma' \cos \alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Figurile reciproce din planul P, referitoare la secțiunea A, dau în proiecție pe planul Q, figuri reciproce referitoare la secțiunea A'.

Pentru a demonstra această teoremă vom determina întîi poziția punctului E' cu ajutorul formulelor (1.25), apoi vom găsi expresiile eforturilor unitare σ, σ', cu ajutorul formulei (1.24). Aplicarea formulelor citate se face prin determinarea elementelor care intră în acestea, și anume elementele care se referă la secțiunea A' proiectată, în funcție de elementele secțiunii A care se proiectează.

Între suprafețe și proiecțiile lor avem:

$$A' = A\cos\alpha; \quad dA' = dA\cos\alpha. \tag{3.38}$$

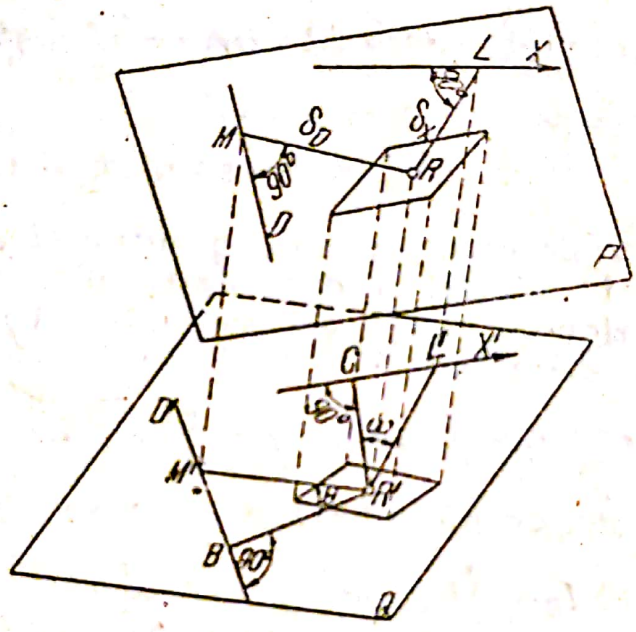

Fig. 3.24

Să considerăm în planul P o axă de referință X și X' proiecția ei ortogonală pe planul Q (fig. 3.24).

Pentru secțiunea A notăm cu S_D, I_D, I_{DX} momentul static, momentul de inerție în raport cu dreapta D și momentul centrifugal în raport cu axele D, X, iar pentru secțiunea A' notăm analog $S'_{D'}$, $I'_{D'}$, $I'_{D'X'}$. Pentru un punct curent R, considerăm distanțele $\delta_D = \overline{RM}$, $\delta_X = \overline{RL}$ la dreptele D și X, care se proiectează pe planul Q după segmentele $\overline{R'M'}$ și $\overline{R'L'}$, iar din punctul R', proiecția lui R, ducem distanțele $\delta'_{D'} = \overline{R'B}$ și $\delta'_{X'} = \overline{R'C}$ respectiv la dreptele D' și X'. Mai notăm cu β unghiul dintre RM și planul Q, cu γ unghiul dintre RL și ace-

laşi plan, cu θ unghiul dintre $R'B$ şi $R'M'$ şi cu ω unghiul dintre $R'C$ şi $R'L'$.

Cu acestea, vom avea

$$\delta'_{D'} = \overline{R'B} = \overline{RM'} \cos\theta = \delta_D \cos\theta \cos\beta. \tag{3.39}$$

In punctul curent R considerăm un element de suprafaţă dA care se proiectează pe planul Q după dA'.

Momentul static al secţiunii A' în raport cu D' este:

$$S'_{D'} = \int \delta'_{D'}\, dA'$$

şi, ţinînd seama de relaţiile (3.38) şi (3.39), avem:

$$S'_{D'} = \int \delta_D \cos\theta \cos\beta \cos\alpha\, dA = \cos\alpha \cos\beta \cos\theta \int \delta_D\, dA$$

sau:

$$S'_{D'} = S_D \cos\alpha \cos\beta \cos\theta. \tag{3.40}$$

De aici rezultă că centrul de greutate G al secţiunii A se proiectează în centrul de greutate G' al secţiunii A'. Valorile momentelor de inerţie ale secţiunilor A şi A' în raport cu D şi D', se obţin astfel:

$$I_D = \int \delta_D^2\, dA, \quad I'_{D'} = \int \delta'^2_{D'}\, dA'.$$

Ţinînd seama de relaţiile (3.38) şi (3.39), obţinem aici:

$$I'_{D'} = \int \delta_D^2 \cos^2\theta \cos^2\beta \cos\alpha\, dA,$$

sau:

$$I_D = I'_{D'} \cos^2\theta \cos^2\beta \cos\alpha. \tag{3.41}$$

In acelaşi fel se obţine:

$$I_{DX} = \int \delta_D \delta_X dA, \quad I'_{D'X'} = \int \delta'_{D'} \delta'_{X'}\, dA'.$$

Aplicînd, în această relaţie, formula (3.39) pentru $\delta'_{X'}$, avem:

$$\delta'_{X'} = \delta_X \cos\omega \cos\gamma \tag{3.42}$$

şi deci:

$$I'_{D'X'} = \int \delta_D \delta_X \cos\theta \cos\beta \cos\omega \cos\gamma \cos\alpha\, dA$$

sau:

$$I'_{D'X'} = I_{DX} \cos\theta \cos\beta \cos\omega \cos\gamma \cos\alpha. \tag{3.43}$$

Dacă punctul E este reciprocul dreptei D, distanțele δ_D^E și δ_X^E de la el la dreptele D și X sînt date de relațiile:

$$\delta_D^E = \frac{I_D}{S_D}; \quad \delta_X^E = \frac{I_{DX}}{S_D}. \tag{3.44}$$

Din formulele (3.39) și (3.42), distanțele $\delta_{D'}^{E'}$ și $\delta_{X'}^{E'}$ de la punctul E' (proiecția punctului E) la dreptele D' și X' sînt:

$$\delta_{D'}^{E'} = \delta_D^E \cos\theta \cos\beta; \quad \delta_{X'}^{E'} = \delta_X^E \cos\omega \cos\gamma$$

și, înlocuind aici pe δ_D^E și δ_X^E cu valorile date de relațiile (3.44), avem:

$$\delta_{D'}^{E'} = \frac{I_D}{S_D} \cos\theta \cos\beta; \quad \delta_{X'}^{E'} = \frac{I_{DX}}{S_D} \cos\omega \cos\gamma. \tag{3.45}$$

Din relațiile (3.40), (3.41) și (3.43), scoatem valorile lui S_D, I_D, I_{DX} și le înlocuim în (3.45), obținînd relațiile:

$$\delta_{D'}^{E'} = \frac{I'_{D'}}{S'_{D'}}; \quad \delta_{D'X'}^{E'} = \frac{I'_{D'X'}}{S'_{D'}}, \tag{3.46}$$

care exprimă că punctul E' este reciprocul dreptei D' (în raport cu secțiunea A').

— Cînd secțiunile A și A' sînt acționate în E și E' (puncte corespunzătoare) de aceeași forță N, eforturile unitare σ și σ', în punctele corespunzătoare F și F' ale celor două secțiuni, sînt:

$$\sigma = \frac{N}{S_D} s; \quad \sigma' = \frac{N}{S'_{D'}} s'. \tag{3.47}$$

Avem din relația (3.39):

$$s' = s \cos\theta \cos\beta.$$

Dacă ținem seama în (3.47) de această relație și de (3.40), rezultă:

$$\sigma' = \frac{Ns}{S_D \cos\alpha} = \frac{\sigma}{\cos\alpha},$$

sau

$$\sigma = \sigma' \cos\alpha; \quad \sigma = \sigma' \frac{A'}{A} \tag{3.48}$$

relații care exprimă legătura dintre eforturile unitare din cele două secțiuni.

— Punctul 3 al teoremei este consecința punctului 1.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicare la secțiuni în formă de paralelogram. Teorema de mai sus are o importantă aplicare la calculul culeelor oblice, care au secțiuni în formă de paralelogram. Ea permite să transformăm secțiunile în formă de paralelogram în secțiuni dreptunghiulare, care se pot calcula ușor fie în cazul cînd lucrează toată secțiunea, fie în cazul secțiunii active.

— Să determinăm geometric secțiunea dreptunghiulară care are ca proiecție o secțiune în formă de paralelogram dată. Fie $BCDF$ paralelogramul dat în planul Q, de laturi a, b și de diagonale d, d', iar $B_1CD_1F_1$ dreptunghiul căutat în planul P (care se proiectează după paralelogramul $BCDF$, fig. 3.25). Notăm cu $a_1=CD_1$, $b_1=CB_1$ $y=B_1D_1$, $z=DD_1$, $e=BB_1$, unde distanța e este dată iar a_1, b_1, y, z sînt necunoscute. Pe figură s-a desenat jumătate din dreptunghi adică CB_1D_1, iar din B_1 s-a dus paralela $B_1B'_1$, la BD.

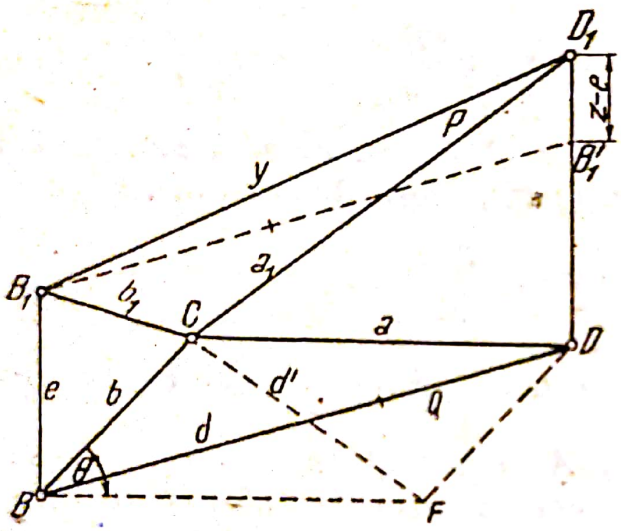

Fig. 3.25

Laturile dreptunghiului, a_1, b_1, sînt determinate de următorul sistem de ecuații, dedus din figură:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2+b_1^2&=y^2\\ a^2+z^2&=a_1^2\\ (z-e)^2+d^2&=y^2\\ b^2+e^2&=b_1^2 \end{aligned}\right\}. \tag{3.49}$$

Adunînd prima ecuație a sistemului cu a doua și scăzînd pe a treia, dacă se ține seama de a patra, obținem:

$$z=\frac{d^2-a^2-b^2}{2e}. \tag{3.50}$$

Într-un paralelogram oarecare avem însă relația:

$$a^2+b^2=\frac{d^2+d'^2}{2}, \tag{3.51}$$

deci relația (3.50) devine:

$$z=\frac{d^2-d'^2}{4e}. \tag{35.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avînd determinat z, putem găsi laturile a_1, b_1 ale dreptunghiului. Problema admite o infinitate de soluții, care depind de valoarea lui e.

Dacă luăm $e=z$, din relația (3.52) obținem:

$$e=z=\frac{1}{2}\sqrt{d^2-d'^2}, \tag{3.53}$$

și din relațiile (3.49), cu valoarea găsită pentru e (3.53), se determină laturile dreptunghiului. Ultima ecuație dă:

$$b_1^2=b^2+\frac{1}{4}(d^2-d'^2) \tag{3.54}$$

iar din triunghiul CBF scoatem

$$d'^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta, \tag{3.55}$$

astfel încît din relația (3.54), eliminînd pe d și d' cu ajutorul relațiilor (3.51) și (3.55), găsim valoarea lui b_1. In același mod se găsește latura a_1 din prima ecuație a sistemului, avînd astfel:

$$a_1=\sqrt{a^2+ab\cos\theta}; \quad b_1=\sqrt{b^2+ab\cos\theta}. \tag{3.56}$$

Să admitem că secțiunea paralelogram $BCDF$, (fig. 3.26) este acționată normal în $E(u, v)$ de o forță de compresiune N și se cere:

— determinarea eforturilor unitare maxime de compresiune și întindere;

— determinarea efortului unitar maxim de compresiune, cînd se consideră că lucrează numai secțiunea activă.

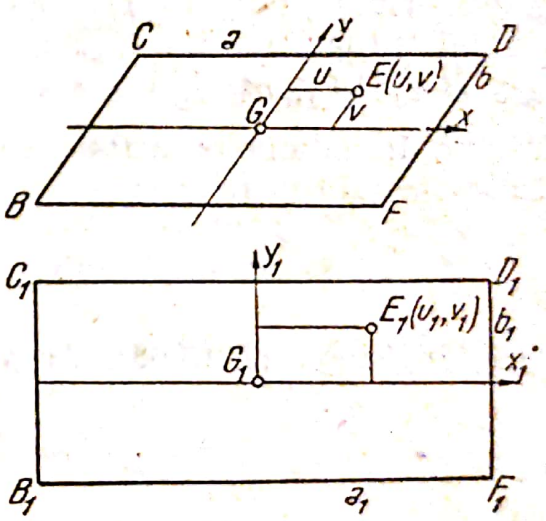

Fig. 3.26

In planul paralelogramului considerăm sistemul de referință xGy, cu originea în centrul G de greutate și cu axele paralele cu laturile secțiunii.

Laturile dreptunghiului $B_1C_1D_1F_1$ a cărei proiecție este paralelogramul dat, sînt date de relațiile (3.56).

Punctul de aplicare $E_1(u_1, v_1)$ din planul dreptunghiului, corespunzător punctului E din planul paralelogramului, are coordonatele date de relațiile:

$$u_1=u\cdot\frac{a_1}{a}; \quad v_1=v\cdot\frac{b_1}{b}. \tag{3.57}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm cu σ și σ' eforturile unitare în două puncte corespunzătoare, respectiv la paralelogram și dreptunghi, iar cu A și A_1 ariile paralelogramului și dreptunghiului. Aplicînd formula (3.48) obținem:

$$\sigma = \sigma' \frac{A_1}{A}. \tag{3.58}$$

Pentru determinarea eforturilor unitare maxime, determinăm întîi pe σ'_{max} și avem:

$$\sigma'_{max} = \frac{N}{A_1}\left(1 \pm \frac{6u_1}{a_1} \pm \frac{6v_1}{b_1}\right),$$

din care, ținînd seama de relația (3.58), obținem:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A}\left(1 \pm \frac{6u_1}{a_1} \pm \frac{6v_1}{b_1}\right), \tag{3.59}$$

care dă eforturile unitare maxime.

— In cazul cînd se consideră că lucrează numai secțiunea activă, se procedează astfel:

Se determină cu ajutorul tabelei din „Manualul pentru beton armat" Editura Tehnică (Editura AGIR), 1949, pag. 103, efortul unitar maxim σ'_{max} referitor la secțiunea dreptunghiulară $B_1C_1D_1F_1$, cînd aceasta este acționată în E_1 de forța N. Intrînd în tabela menționată cu valorile $\frac{u_1}{a_1}$, $\frac{v_1}{b_1}$, se determină un coeficient μ și avem:

$$\sigma'_{max} = \mu \frac{N}{A_1},$$

care, înlocuită în (3.58), dă pentru paralelogram:

$$\sigma_{max} = \mu \frac{N}{A}. \tag{3.60}$$

In mod asemănător se procedează și în cazul secțiunilor în formă de elipsă, de coroane eliptice etc., cînd se studiază determinarea eforturilor, considerînd că lucrează întreaga secțiune sau numai secțiunea activă.

2. Proiecția cilindrică oblică

Putem proiecta secțiunea A din planul P, pe un plan oarecare Q, utilizînd proiecția cilindrică oblică (razele de

proiecție fiind paralele cu o direcție dată în spațiu). Considerăm secțiunea A acționată în E de forța normală N și notăm cu A' secțiunea proiectată astfel pe planul Q, iar cu E' proiecția punctului E. Ne propunem:

— să găsim relația dintre eforturile unitare σ, σ' din două puncte corespunzătoare F, F' ale secțiunilor A și A', cînd sînt acționate fiecare, respectiv în E și E', de aceeași forță normală N;

— să demonstrăm că și în proiecția cilindrică oblică figurile reciproce din planul P în raport cu A rămîn tot figuri reciproce în raport cu A' în planul Q.

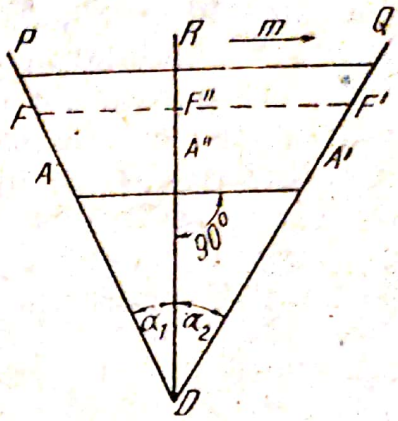

Fig. 3.27

Pentru a rezolva primul punct, figurăm planele P și Q prin urmele lor pe un plan normal pe dreapta lor D de intersecție (fig. 3.27). Prin dreapta D ducem un plan R normal pe direcția m a razelor de proiecție. Notăm cu α_1 și α_2 unghiurile dintre planul R respectiv cu planele P și Q. Fasciculul razelor de proiecție paralel cu direcția m cade perpendicular pe planul R și determină pe acesta secțiunea A'', care este chiar proiecția ortogonală a secțiunii A pe acest plan. Notăm cu E'' și F'' proiecțiile ortogonale ale punctelor E, F pe planul R, care se găsesc la intersecția razelor EE' și FF' cu acesta și cu σ'' efortul unitar în punctul F'' cînd secțiunea A'' este acționată în E'' de forța normală N.

Secțiunea A'' fiind proiecția ortogonală a secțiunii A, putem aplica relațiile (3.48) și obținem:

$$\sigma = \sigma'' \cos \alpha_1 \quad \text{sau} \quad \sigma = \sigma'' \frac{A''}{A}. \qquad (3.61)$$

Secțiunea A'' este și proiecția ortogonală a secțiunii A' și aplicînd din nou formulele (3.48) avem:

$$\sigma' = \sigma'' \cos \alpha_2 \quad \text{sau} \quad \sigma' = \sigma'' \frac{A''}{A'}. \qquad (3.62)$$

Împărțind relațiile (3.61) prin (3.62), obținem:

$$\sigma = \sigma' \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \quad \text{sau} \quad \sigma = \sigma' \frac{A'}{A} \qquad (3.63)$$

Scanned with OKEN Scanner

relație care dă legătura între eforturile unitare în puncte corespunzătoare ale secțiunilor A și A'.

Pentru a rezolva punctul al doilea, pornim de la faptul că secțiunea A'' este proiecția ortogonală respectiv a secțiunilor A și A'. Fie Φ și Ψ două figuri reciproce în planul P în raport cu secțiunea A. Figurile Φ și Ψ au ca proiecții cilindrice oblice Φ', Ψ' pe planul Q, iar ca proiecții ortogonale Φ'', Ψ'' pe planul R. Insă figurile Φ'' și Ψ'' sînt și proiecțiile ortogonale pe planul R ale figurilor Φ' și Ψ'. In baza teoremei stabilite la proiecția ortogonală, rezultă că Φ'' și Ψ'' sînt figuri reciproce în raport cu secțiunea A'', iar Φ' și Ψ' sînt figuri reciproce în raport cu secțiunea A', deoarece proiecțiile lor ortogonale Φ'' și Ψ'' sînt figuri reciproce în raport cu A'' proiecția lui A'.

3. Proiecția conică

Proiecția conică, fiind o transformare proiectivă de forma (3.21) în care α_3, β_3 nu sînt simultan nuli, rezultă că nu îndeplinește condițiile unei transformări complete.

§ 4. DETERMINAREA PUNCTULUI RECIPROC AL UNEI DREPTE DATE

Problema determinării punctului de aplicare al forței, cînd se cunoaște axa neutră, este o problemă inversă cazurilor studiate în § 1 și § 2, din acest capitol. Ea își găsește aplicare la determinarea simburelui central, la găsirea diverselor figuri reciproce ale secțiunilor, la calculul secțiunilor de beton armat etc.

A. DETERMINAREA PUNCTULUI RECIPROC AL UNEI DREPE, CÎND SE DAU (DR Δ, Δ'; B, B'), DREPTELE Δ, Δ' NETRECÎND PRIN CENTRUL DE GREUTATE G

1. Metoda analitică

Să găsim reciprocul $E(a, b)$ al dreptei Δ_E cînd se cunosc două drepte Δ, Δ' și reciprocele lor $B(x_1, y_1)$ și $B'(x_2, y_2)$ în raport cu secțiunea considerată.

Scanned with OKEN Scanner

Dreapta Δ_E fiind dată, se cunosc punctele $Q(x_Q, y_Q)$, $Q'(x_{Q'}, y_{Q'})$ de la intersecția ei cu dreptele GB, GB' și atunci din formulele (3.4) găsim:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\xi(x_{Q'}-x_2)}{x_{Q'}-\xi}, \quad b = \frac{\eta(x_Q-x_1)}{x_Q-\xi} \\ a &= \frac{\xi(y_{Q'}-y_2)}{y_{Q'}-\eta}, \quad b = \frac{\eta(y_Q-y_1)}{y_Q-\eta} \end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

Menționăm că dacă punctele Q, Q' sînt inaccesibile, putem determina prin metodele cunoscute alte puncte pentru care să putem aplica formulele (3.64)

In cazul cînd Δ_E trece prin G, formulele (3.64) nu mai au sens și vom lua o altă dreaptă $\Delta_{E'}$, paralelă cu Δ_E, căreia îi vom determina reciprocul E'. Punctul E este la infinit în direcția GE'.

2. Metode grafice

— Presupunem întîi că dreapta Δ_E nu trece prin G.

Problema se poate rezolva prin construcții inverse celor date în acest capitol, § 1. Să arătăm cum procedăm în cazul general, aplicînd, de exemplu, construcția din fig. 3.6, refăcută invers.

Ducem prin G două drepte arbitrare Γ, Γ' și alegem pe fiecare cîte un punct oarecare D, D'. Notăm cu Q, Q' intersecțiile dreptei Δ_E cu GB și GB', iar din punctele B și B' se duc drepte paralele respectiv la QD și $Q'D'$, pînă intersectează pe Γ și Γ' în F, respectiv F'. Fie C și C' punctele de intersecție dintre Δ cu GB și Δ' cu GB'. Dreptele paralele duse prin punctele F și F', la CD respectiv $C'D'$ determină pe GB și GB' punctele N și N'. Paralelele duse prin N și N' la Δ respectiv Δ' se intersectează în punctul E căutat.

O construcție simplificată este dată în fig. 3.28, în care luăm dreptele arbitrare Γ și Γ', confundate respectiv cu GB' și GB.

Notăm cu C și C' punctele de intersecție ale dreptelor Δ cu GB și Δ' cu GB'. Cum punctele D și D' pot fi luate arbitrar pe Γ și Γ' (v. fig. 3.3), le vom lua respectiv confundate cu C' și C.

Fie F și F' punctele unde paralelele duse prin B și B' la QD, respectiv $Q'D'$, intersectează dreptele Γ și Γ'. Parale-

Scanned with OKEN Scanner

lele duse prin F și F' la dreapta DD' întîlnesc dreptele GB și GB' în punctele N și N'. Punctul E căutat este la intersecția paralelelor duse prin N și N' la Δ, respectiv Δ'.

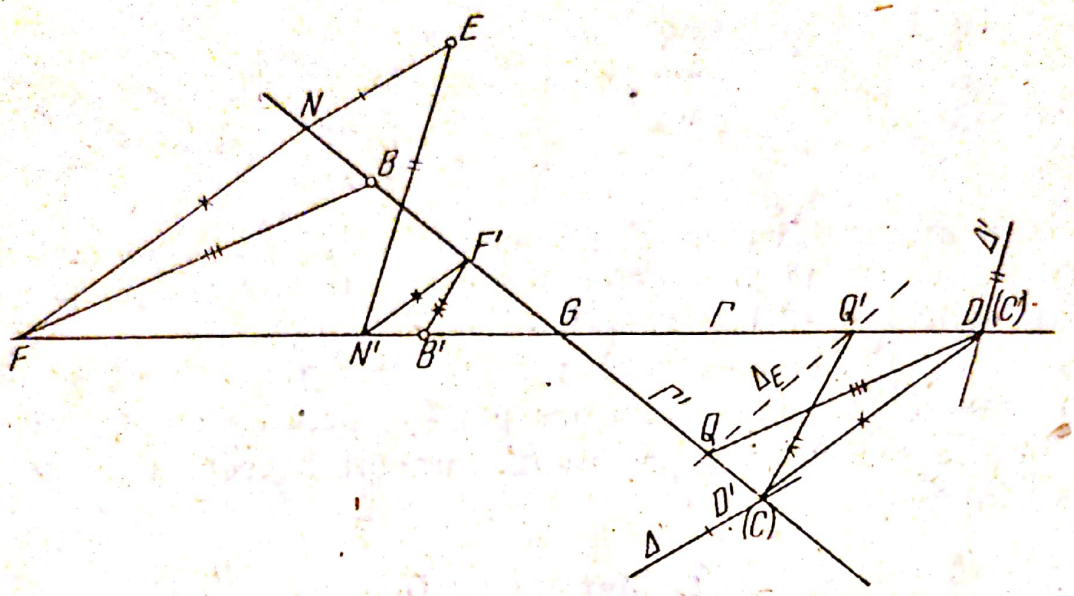

Fig. 3.28

— Aceeași problemă se poate pune, în cazul cînd axa neutră Δ_E trece prin G. Punctul E va fi aruncat la infinit pe o direcție pe care o găsim astfel: luăm o dreaptă $\Delta_{E'}$ paralelă cu Δ_E și-i determinăm, ca în cazul precedent, punctul E'. Direcția pe care se află punctul E de la infinit este dată de GE'.

— In cap. II, § 2, punctul B, c, (fig. 2.7) am indicat modul cum se construiește punctul reciproc al unei drepte care trece printr-un vîrf al triunghiului. Să demonstrăm acum această construcție, urmărind raționamentul pe fig. 3.29. Se caută punctul reciproc E al dreptei Δ_E dusă prin vîrful A al triunghiului. El se găsește pe dreapta Δ_A, reciprocă a punctului A. Pentru a mai găsi o dreaptă pe care se găsește punctul E, considerăm dată (dr b, B') și facem invers construcția indicată la începutul paragrafului (fig. 3.3).

Luăm ca dreaptă Γ dreapta GA, iar punctul D în punctul A. Punctul Q este la intersecția dintre GB' cu Δ_E, iar intersecția dintre dreptele AC, GB' este în L. Ducem apoi prin B' o paralelă la DQ pînă ce întîlnește dreapta GA (dr Γ) în punctul F. Paralela dusă prin F la DL întîlnește dreapta GB' în punctul N. Punctul E se găsește pe paralela dusă din

punctul N la latura AC, care se confundă cu paralela FN la DL. Deci nu mai este nevoie de construirea paralelei dusă prin N la AC. Punctul E este la intersecția dreptei Δ_A cu paralela dusă prin F la AC. Astfel, construcția dată în fig. 2.7 este justificată.

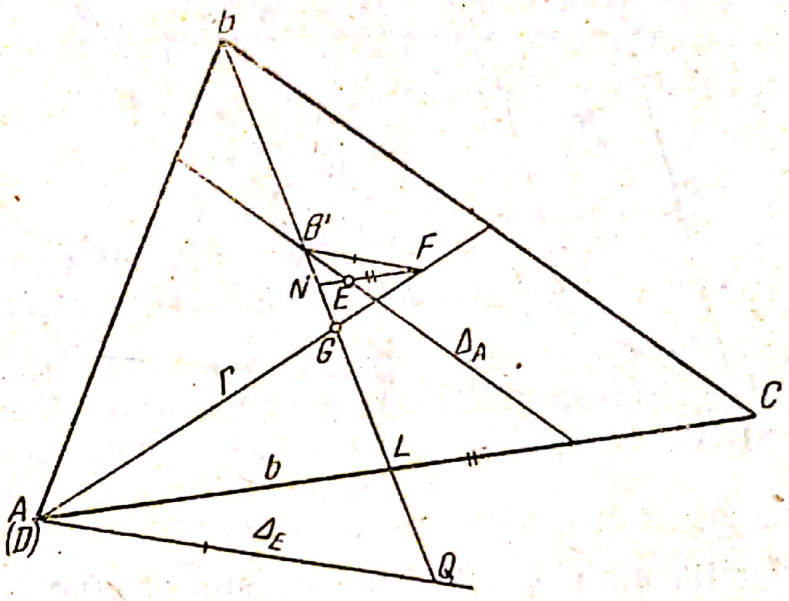

Fig. 3.29

— Să demonstrăm acum și construcția din cap. II, § 2, punctul B, (fig. 2.10, 2.11) în care se determină punctul reciproc E al unei drepte Δ paralelă cu o latură a unui triunghi. Pentru aceasta, aplicăm construcția din fig. 3.3 făcută invers.

Punctul E se găsește pe mediana BB_1, iar C_1A_1 este dreapta care unește mijloacele laturilor c, a; luăm (dr C_1A_1; B_1), D un punct oarecare și se consideră dreapta GD ca dreaptă Γ. Paralela dusă prin B_1 la QD (fig. 2.10) întîlnește dreapta GD în F, iar paralela dusă din punctul F la $B'D$ intersectează dreapta GB_1 în punctul E. (Se vede că punctul N din construcția generală se confundă în acest caz cu E).

O altă construcție a punctului reciproc E cînd se dă dreapta Δ_E pentru o secțiune oarecare se obține făcînd invers construcția din fig. 3.11. Construcția este dată în fig. 3.30 și se face astfel:

Se duce o dreaptă oarecare GL, care intersectează dreptele Δ și Δ' în punctele D', respectiv D. Paralelele duse prin P și P' (punctele unde Δ_E întîlnește axele Δ și Δ') la dreptele Δ' respectiv Δ intersectează dreapta GL în punctele I și I'.

Fie F punctul de intersecție dintre GB' și dreapta dusă prin D paralelă cu IB', iar F' intersecția dintre GB cu paralela dusă prin D' la $I'B$. Punctul E căutat se găsește la intersecția dreptei FB cu $F'B'$.

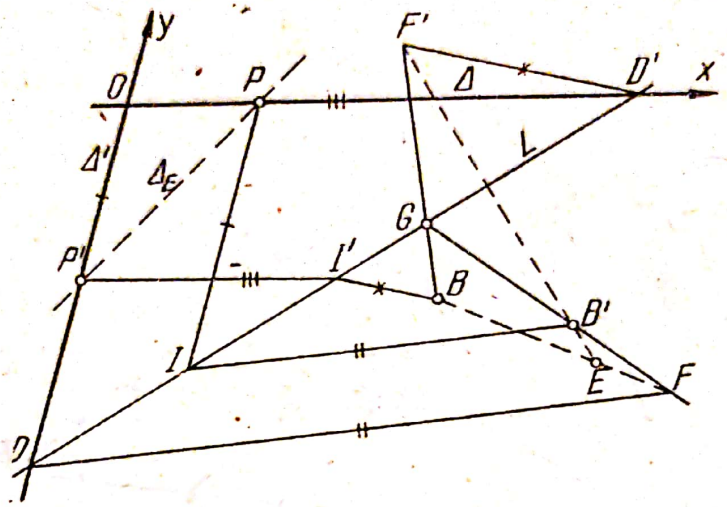

Fig. 3.30

Construcția aceasta este indicată atunci cînd cea arătată înainte nu se poate executa în cadrul figurii, sau cînd vrem să facem o verificare a celeilalte construcții.

— In cazul cînd axa neutră Δ_E trece prin G, se procedează asemănător construcției anterioare.

Facem remarca că dreapta GL se poate duce printr-unul din punctele P sau P'.

B. DETERMINAREA PUNCTULUI RECIPROC AL UNEI DREPTE, UTILIZÎND DOUĂ DREPTE, DINTRE CARE UNA TRECE PRIN CENTRUL DE GREUTATE G

Problema constă în aflarea punctului reciproc E al dreptei Δ_E, cînd se cunoaște (dr Δ, Δ'; dir m, B').

In acest caz, construcția pentru aflarea punctului E se obține făcînd invers construcția dată în fig. 3.19, astfel: prin punctele B' și O, se duc respectiv paralele la OQ' și PB', pînă întîlnesc dreptele Δ și GB' respectiv în L și F. Punctul E căutat este la intersecția paralelelor duse prin L și F la axa Δ', respectiv la direcția m.

— In cazul cînd Δ_E trece prin G se procedează ca mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

— Construcția dată aici se poate aplica în cazul triunghiurilor la problemele tratate anterior.

C. APLICAREA INVOLUȚIEI LA DETERMINAREA PUNCTULUI RECIPROC AL UNEI DREPTE

Dacă se dau (dr Δ, Δ'; B, B') și se cere să determinăm punctul reciproc E al unei drepte date Δ_E, putem face construcția grafică și cu ajutorul involuției, invers ca la § 2, fig. 3.20 sau fig. 3.22.

§ 5. DETERMINAREA EFORTURILOR UNITARE CU AJUTORUL SIMBURELUI CENTRAL

Metoda de calcul a eforturilor unitare pentru punctele de pe conturul secțiunii cu ajutorul simburelui central este cunoscută. Dificultatea metodei constă însă în găsirea simburelui central.

Prin metodele expuse aici, se poate determina mult mai ușor simburele central. Metoda se pretează foarte bine pentru secțiuni în formă de: triunghi, dreptunghi, paralelogram, trapez, elipsă etc. ai căror simburi centrali se găsesc imediat.

Să arătăm cum se face aplicarea metodei.

Fie o secțiune A solicitată într-un punct $E(u, v)$ de forța normală N. Efortul unitar într-un punct oarecare Q al acestei secțiuni este dat de formula:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Nux}{Iy} + \frac{Nvy}{I_x}.$$

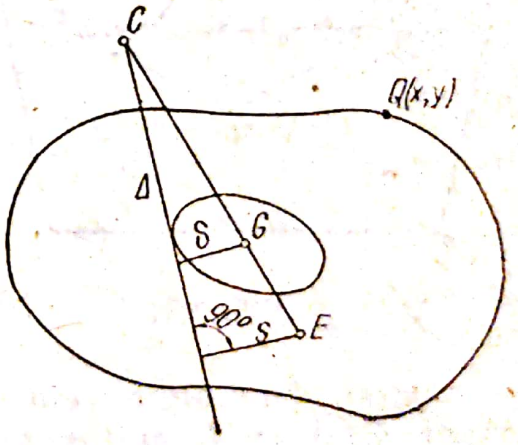

Fig. 3.31

Din formulă se vede că efortul unitar în punctul Q, cînd acționează în E forța N, este egal cu efortul unitar în punctul E, cînd aceeași forță acționează în Q.

Să considerăm secțiunea A (fig. 3.31), căreia i-am determinat simburele central, și să luăm punctul Q pe conturul secțiunii.

Rezultă că putem calcula efortul unitar în Q, considerînd că în acest punct acționează forța N și apoi determinînd

efortul unitar în E. Axa neutră corespunzătoare punctului Q este dreapta Δ, care este tangentă la sîmburele central. Fie C punctul de intersecție al dreptei GE cu dreapta Δ, iar δ și s distanțele de la G și E la dreapta Δ.

Efortul unitar în E este:

$$\sigma = \frac{N}{A \cdot \delta} s;$$

cum însă $\frac{s}{\delta} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CG}}$, efortul unitar în punctul Q capătă forma:

$$\sigma_Q = \frac{N}{A} \frac{\overline{CE}}{\overline{CG}}. \qquad (3.65)$$

Dacă în E acționează o forță de compresiune, efortul unitar σ_Q este de compresiune dacă $\overline{CE}$ și $\overline{CG}$ au același sens, și de întindere dacă au sensuri contrare. In cazul cînd punctul C este în afara cadrului, vom folosi formula:

$$\sigma_Q = \frac{N}{S} s. \qquad (3.66)$$

Este evident că putem determina efortul unitar în orice punct din interiorul secțiunii ducînd prin punct o dreaptă oarecare, determinînd apoi eforturile unitare în punctele unde aceasta intersectează conturul secțiunii și, prin interpolare, aflăm efortul unitar în punctul considerat. De asemenea, putem determina axa neutră corespunzătoare oricărui punct.

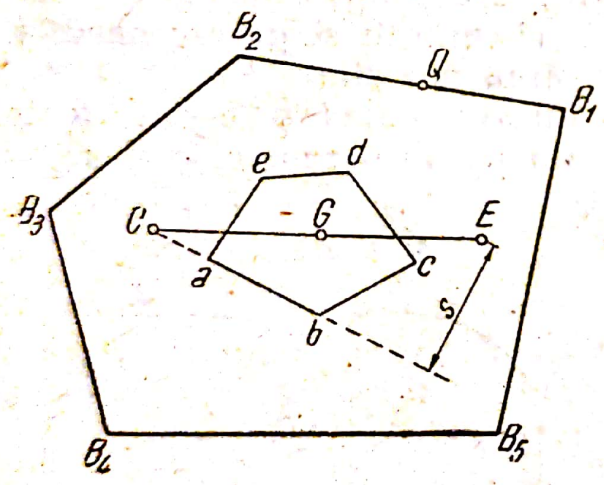

Fig. 3.32

— In cazul secțiunilor poligonale (fig. 3.32) pot fi ușor determinate eforturile unitare din vîrfurile B_i ($i = 1, 2 \ldots 5$), ale secțiunii.

Astfel, dacă sîmburele central este *abcde* și (dr *ab*; B_1) atunci cînd în E acționează forța N, efortul unitar în B_1 este:

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{CG}} \quad \text{sau} \quad \sigma = \frac{N}{S_{ab}} \cdot s, \qquad (3.67)$$

unde S_{ab} este momentul static al secțiunii în raport cu dreapta *ab*, și s — distanța de la E la *ab*.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina efortul unitar în punctul Q, vom afla efortul unitar și în B_2 și apoi vom interpola.

Din cele precedente rezultă că nu este nevoie să aflăm tot simburele central al unei secțiuni, fiind necesar să găsim numai punctele reciproce a două laturi ale secțiunii.

CAPITOLUL IV

CALCULUL ELEMENTELOR DE BETON ARMAT SOLICITATE EXCENTRIC, PRIN METODA REZISTENȚELOR ADMISIBILE

In general, elementele de beton armat se calculează conform prescripțiilor date în STAS 1546-50, care sînt întocmite pe baza sarcinilor la rupere. Aceste prescripții nu se aplică însă la poduri și la unele construcții hidrotehnice.

In cele ce urmează, vom indica pentru verificarea secțiunilor de beton armat, trei metode bazate pe teoria expusă în lucrarea de față.

§ 1. METODA I

A. SECȚIUNI OARECARE

a) **Secțiunea de beton armat este solicitată în punctul $E(a, b)$ de forța N.**

Se cere să se determine axa neutră și eforturile unitare maxime în beton și armături.

— *Axa neutră* se determină prin încercări (fig. 4.1), în felul următor:

Pentru secțiunea armăturii A_f, considerată în secțiune echivalentă de beton, determinăm: centrul său de greutate G_f, direcțiile cen-

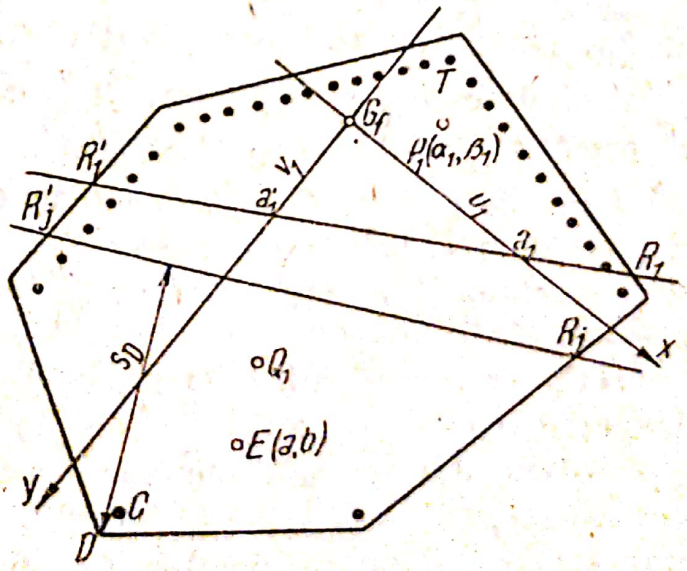

Fig. 4.1

trale principale x, y, momentele principale de inerție I_{xf}, I_{yf} și razele corespunzătoare de giratie:

$$i_{xf}^2 = \frac{I_{xf}}{A_f}, \quad i_{yf}^2 = \frac{I_{yf}}{A_f}.$$

Se ia pentru axa neutră o dreaptă aleasă convenabil, reprezentînd axa neutră probabilă, a cărei poziție o îmbunătățim apoi succesiv. Fie R_1R_1' prima poziție aleasă a axei neutre probabile. Măsurăm coordonatele tăieturilor u_1, v_1 ale dreptei R_1R_1' și cu ele ecuația acestei drepte se scrie:

$$\frac{x}{u_1} + \frac{y}{v_1} = 1. \tag{4.1}$$

Să determinăm punctul $P_1(\alpha_1, \beta_1)$ reciprocul dreptei R_1R_1' în raport cu secțiunea armăturii. Ecuația dreptei R_1R_1' se mai scrie:

$$\frac{\alpha_1 x}{i_{yf}^2} + \frac{\beta_1 y}{i_{xf}^2} + 1 = 0; \tag{4.2}$$

din relațiile (4.1) și (4.2) rezultă:

$$\alpha_1 = -\frac{i_{yf}^2}{u_1}; \quad \beta_1 = -\frac{i_{xf}^2}{v_1}. \tag{4.3}$$

Aflăm apoi punctul Q_1, reciprocul dreptei R_1R_1' în raport cu A_{1b}, secțiunea activă de beton R_1DR_1'.

Calculăm S_{1b} și S_{1f} momentele statice ale secțiunii A_{1b} și al armăturii A_f, în raport cu R_1R_1'.

Considerăm în P_1 și Q_1 mărimi egale cu S_{1f}, respectiv S_{1b}, și apoi determinăm pe dreapta P_1Q_1 punctul de aplicare E_1 al rezultantei acestor mărimi. Dacă E_1 coincide cu E, dreapta R_1R_1' este chiar axa neutră căutată. In caz contrar, operația se repetă pînă se găsește o poziție apropiată R_jR_j' a axei neutre.

— Să determinăm acum *eforturile unitare maxime în beton și armătură*. Dacă notăm cu s_D distanța maximă a unui punct al zonei comprimate la axa neutră și cu s_C și s_T distanțele maxime ale armăturii comprimate, respectiv întinse, la axa neutră, avem:

efortul unitar maxim în beton:

$$\sigma_b = \frac{N}{S_{jb} + S_{jf}} s_D, \tag{4.4}$$

eforturile unitare maxime de compresiune și întindere în armătură:

$$\sigma_{fc} = \frac{nN}{S_{jb} + S_{jf}} s_C, \tag{4.5}$$

$$\sigma_{ft} = \frac{nN}{S_{jb} + S_{jf}} s_T. \tag{4.6}$$

In aceste relații S_{jb}, S_{jf} sînt momente statice ale secțiunii de beton activ și întregii armături considerată în secțiune echivalentă de beton, în raport cu axa neutră $R_jR'_j$, iar n este raportul dintre modulul de elasticitate al fierului și betonului.

b) **Secțiunea este solicitată de un moment oarecare** M (fig. 4.2).

— Pentru determinarea axei neutre, vom proceda la fel ca în cazul *a*, ținînd seama însă că secțiunea este solicitată de o forță aplicată într-un punct la infinit, după o direcție perpendiculară pe direcția vectorului moment. Astfel aflăm, prin încercări, axa neutră $R_jR'_j$.

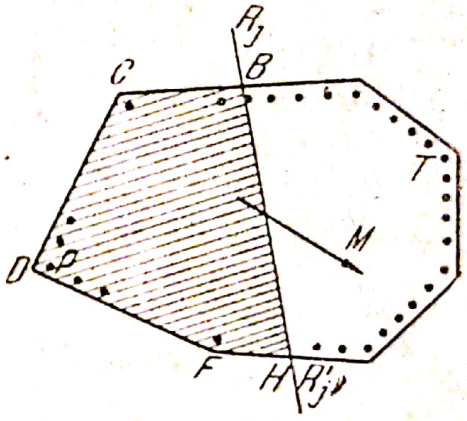

Fig. 4.2

— Deoarece în cazul secțiunilor de beton armat se consideră secțiunea activă, nu se mai poate aplica formula (1.27). Să stabilim formulele care dau eforturile unitare în beton și armătură pentru secțiunile de beton armat, solicitate de un moment. Aflăm punctele reciproce E_b și E_f, ale dreptei $R_jR'_j$ în raport cu secțiunea comprimată de beton A_b, respectiv cu întreaga secțiune a armăturii A_f. Dacă S_b este momentul static al secțiunii comprimate A_b, în raport cu $R_jR'_j$, avem:

efortul unitar de compresiune în beton într-un punct oarecare D:

$$\sigma_b = \frac{M}{S_b \cdot E_b E_f} s_D. \tag{4.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

efortul unitar de compresiune, respectiv întindere în punctele oarecare P, T ale armăturii:

$$\sigma_{fc} = \frac{nM}{S_b E_b E_f} \cdot s_P \tag{4.8}$$

$$\sigma_{ft} = \frac{nM}{S_b E_b E_f} \cdot s_T. \tag{4.9}$$

B. SECȚIUNI DREPTUNGHIULARE

a) **Secțiunea este solicitată în $E(a, b)$ de forța N.**

Deosebim trei cazuri posibile:

Suprafața comprimată este un triunghi (fig. 4.3). Determinăm ca mai sus A_f, G_f, I_{xf}, I_{yf}, i^2_{xf}, i^2_{yf}, apoi încercăm cu o dreaptă $R_1R'_1$ ca axă neutră probabilă.

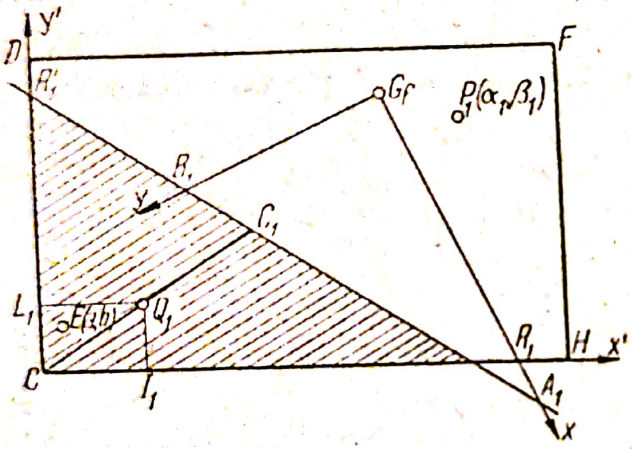

Fig. 4.3

Calculăm reciprocul $P_1(\alpha_1, \beta_1)$ al dreptei $R_1R'_1$ în raport cu secțiunea armăturii A_f, cu ajutorul formulelor (4.3).

Punctul reciproc Q_1 al dreptei $R_1R'_1$ în raport cu secțiunea activă de beton $R_1CR'_1$ are în sistemul de referință $x'Cy'$ coordonatele:

$$x_1 = \overline{CI_1} = \frac{\overline{CR_1}}{4}; \quad y_1 = \overline{CL_1} = \frac{\overline{CR'_1}}{4} \tag{4.10}$$

(Q_1 este la mijlocul medianei $\overline{CC_1}$).

Fie S_{1f}, S_{1b} momentele statice, al armăturii și al secțiunii active de beton în raport cu $R_1R'_1$ și p_1, q_1 coordonatele punctului P_1 măsurate față de sistemul de referință $x'Cy'$. Calculăm expresiile:

$$a_1 = \frac{p_1 S_{1f} + x_1 S_{1b}}{S_{1f} + S_{1b}}; \quad b_1 = \frac{q_1 S_{1f} + y_1 S_{1b}}{S_{1f} + S_{1b}}. \tag{4.11}$$

Dacă $a_1 \approx a$, $b_1 \approx b$, punctul $E_1(a_1, b_1)$ este foarte aproape sau chiar coincide cu E, iar $R_1R'_1$ este axa neutră.

În cazul cînd E_1 nu este destul de apropiat de E, luăm o altă dreaptă R_2R_2' și găsim punctul $E_2(a_2, b_2)$ ca mai sus. Continuăm operațiile pînă găsim un punct $E_j(a_j, b_j)$ foarte apropiat de E și atunci R_jR_j' este axa neutră.

Suprafața comprimată este un trapez. Procedăm la fel ca mai sus, însă pentru determinarea punctului $Q_1(x_1, y_1)$, reciprocul dreptei R_1R_1' în raport cu secțiunea de beton comprimată, aplicăm tabelele de la secțiunea trapezoidală.

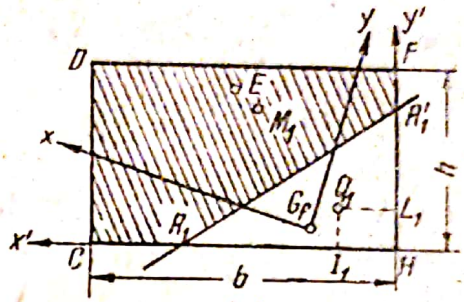

Fig. 4.4

Suprafața comprimată este un pentagon (fig. 4.4). În acest caz considerăm o secțiune A_f' egală cu suma dintre secțiunea armăturii A_f și întreaga secțiune de beton dată:

$$A_{f'} = A_f + bh. \tag{4.12}$$

Rolul lui A_f de la primul caz îl îndeplinește aici $A_{f'}$. Găsim punctul reciproc P_1 al dreptei R_1R_1' (luată ca axă neutră probabilă) în raport cu $A_{f'}$, și-i determinăm coordonatele p_1, q_1 în raport cu sistemul de referință $x'Hy'$. Determinăm apoi reciprocul $Q_1(x_1, y_1)$ al dreptei R_1R_1' în raport cu triunghiul R_1HR_1':

$$x_1 = \overline{HI_1} = \frac{\overline{HR_1}}{4}; \quad y_1 = \overline{HL_1} = \frac{\overline{HR_1'}}{4}. \tag{4.13}$$

Fie de asemenea $S_{1f'}$, $S_{1b'}$ momentele statice în raport cu R_1R_1' ale secțiunilor $A_{f'}$ și R_1HR_1'.

Vom calcula, ca și în cazul precedent, expresiile:

$$a_1 = \frac{p_1 S_{1f'} - x_1 S_{1b'}}{S_{1f'} - S_{1b'}}; \quad b_1 = \frac{q_1 S_{1f'} - y_1 S_{1b'}}{S_{1f'} - S_{1b'}}. \tag{4.14}$$

Dacă $a_1 \approx a$, $b_1 \approx b$, atunci dreapta R_1R_1' este axă neutră; dacă nu, se aplică metoda încercărilor succesive arătată mai sus.

b) **Secțiunea este solicitată de un moment M oarecare.**

Ducem o perpendiculară Δ pe direcția momentului (fig. 4.5) și notăm direcția dreptei Δ cu $m' = \operatorname{tg} \alpha$.

Să presupunem că ne aflăm în cazul cînd secțiunea de beton comprimată este triunghiulară. Procedăm ca la punctul a) primul caz, și vom avea:

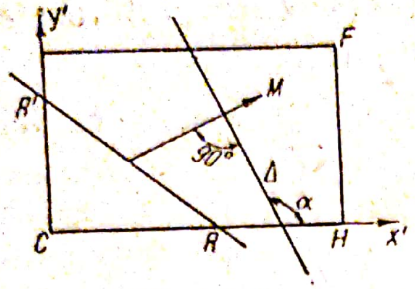

Fig. 4.5

$$\varepsilon_1 = S_{1f} + S_{1b}; \quad m_1' = \frac{q_1 S_{1f} + y_1 S^{1b}}{p_1 S_{1f} + x_1 S_{1b}} \cdot (4.15)$$

Din cauză că $S_{1f} + S_{1b} \approx 0$, relațiile (4.15) devin:

$$\varepsilon_1 = S_{1f} + S_{1b}; \quad m_1' = \frac{q_1 - y_1}{p_1 - x_1} \cdot \qquad (4.16)$$

Vom calcula pe ε_1 și m_1' cu formulele (4.16) și dacă $\varepsilon_1 \approx 0$; $m_1' \approx m'$, atunci $R_1 R_1'$ este axă neutră etc.

In cazul cînd secțiunea comprimată este trapezoidală vom proceda ca la punctul a) cazul al doilea. Se calculează expresiile date de (4.16) și se cercetează dacă $\varepsilon_1 \approx 0$, $m_1' \approx m'$ etc.

Dacă secțiunea comprimată este un pentagon, expresiile (4.15) au forma:

$$\varepsilon_1 = S_{1f'} - S_{1b'}; \quad m_1' = \frac{q_1 S_{1f'} - y_1 S_{1b'}}{p_1 S_{1f'} - x_1 S_{1b'}} \cdot \qquad (4.17)$$

Și cum $S_{1f'} - S_{1b'} = 0$, avem:

$$\varepsilon_1 = S_{1f'} - S_{1b'}; \quad m_1' = \frac{q_1 - y_1}{p_1 - x_1} \cdot \qquad (4.18)$$

Deci, cercetăm dacă $\varepsilon_1 \approx 0$, $m_1' \approx m'$ etc.

§ 2. METODA A II-A A APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE

A. SECȚIUNI OARECARE

a) **Secțiunea oarecare de beton armat (fig. 4.6) este acționată în punctul $E(a, b)$ de forța N.**

Formulele (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) și (4.9) dau eforturile unitare, cînd cunoaștem axa neutră.

Pentru determinarea acestei axe neutre, alegem două drepte oarecare Δ, Δ', care servesc și ca axe de referință.

Găsim punctele $B_1(x_1, y_1)$, $B_1'(x_1', y_1')$, reciprocele dreptelor Δ, Δ' în raport cu întreaga secțiune, a betonului și armăturii. Pentru aceasta calculăm întîi $I_{\Delta f}$, $I_{\Delta' f}$, $I_{\Delta\Delta' f}$, $S_{\Delta f}$, $S_{\Delta' f}$ momen-

tele de inerție, centrifugale și statice, ale secțiunii armăturii A_f în raport cu axele Δ, Δ' și determinăm punctele $B_f(c, d)$, $B'_f(c', d')$ reciprocele dreptelor Δ, Δ' în raport cu armătura. Avem:

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{I_{\Delta\Delta' f}}{S_{\Delta f}}; \quad d = \frac{I_{\Delta f}}{S_{\Delta f}} \\ c' &= \frac{I_{\Delta' f}}{S_{\Delta' f}}; \quad d' = \frac{I_{\Delta\Delta' f}}{S_{\Delta' f}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

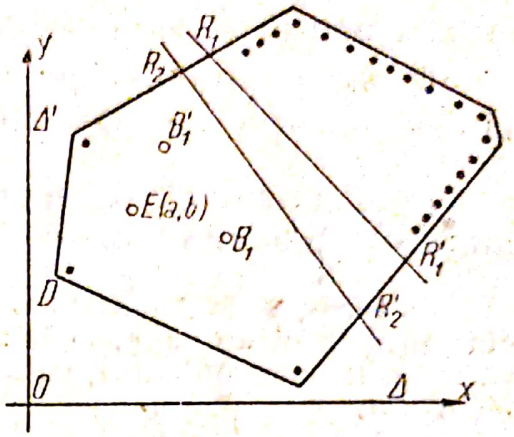

Fig. 4.6

Determinăm apoi, prin unul dintre procedeele indicate anterior, punctele $B_{1b}(x_{1b}, y_{1b})$, $B'_{1b}(x'_{1b}, y'_{1b})$, reciprocele dreptelor Δ, Δ' în raport cu întreaga secțiune a betonului și calculăm $S_{\Delta b1}$ și $S_{\Delta' b1}$ momentele statice ale întregii secțiuni de beton, în raport cu Δ și Δ'.

Coordonatele punctelor B_1, B'_1 sînt:

$$\left.\begin{aligned} B_1: \quad x_1 &= \frac{x_{1b} S_{\Delta b_1} + c S_{\Delta f}}{S_{\Delta b_1} + S_{\Delta f}}; \quad y_1 = \frac{y_{1b} S_{\Delta b_1} + d S_{\Delta f}}{S_{\Delta b_1} + S_{\Delta f}} \\ B'_1: \quad x'_1 &= \frac{x'_{1b} S_{\Delta' b_1} + c' S_{\Delta' f}}{S_{\Delta' b_1} + S_{\Delta' f}}; \quad y'_1 = \frac{y'_{1b} S_{\Delta' b_1} + d' S_{\Delta' f}}{S_{\Delta' b_1} + S_{\Delta' f}} \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Fiind date (dr Δ; B_1), (dr Δ'; B'_1), determinăm, cu una dintre metodele expuse, axa neutră $R_1R'_1$ corespunzătoare punctului $E(a, b)$. Această axă neutră corespunde întregii secțiuni, a betonului și armăturii, în ipoteza că betonul rezistă la întindere.

La încercarea a doua, considerăm secțiunea armăturii A_f și secțiunea betonului $A_{2b} = R_1 DR'_1$, de asemenea în ipoteza să betonul rezistă la întindere.

Determinăm în același fel, ca mai sus, punctele $B_2(x_2, y_2)$, $B'_2(x'_2, y'_2)$ reciprocele dreptelor Δ, respectiv Δ' în raport cu secțiunea totală $A_f + A_{2b}$. Considerăm date (dr Δ; B_2), (dr Δ'; B'_2) și găsim axa neutră $R_2R'_2$ corespunzătoare punctului E în raport cu secțiunea activă a betonului $R_1DR'_1$ și cu secțiunea armăturii.

Vom proceda astfel, prin aproximații succesive, neglijînd pe rînd secțiunile de beton întinse.

Astfel, la încercarea a treia se determină axa neutră R_3R_3' a secțiunii betonului $A_{3b}=R_2DR_2'$ și a secțiunii armăturii A_f.

Dacă R_3R_3' este foarte aproape de R_2R_2' se consideră R_3R_3' ca axă neutră și deci secțiunea activă este R_3DR_3'.

În caz contrar, se continuă operația pînă se găsește o poziție apropiată a axei neutre R_jR_j'.

b) **În cazul cînd secțiunea este solicitată de un moment oarecare, se procedează în mod asemănător.**

Observație. Metoda aproximațiilor succesive conduce matematic, din aproape în aproape, la poziția reală a axei neutre. Această metodă permite, în mod obișnuit, să se rezolve problema prin două sau trei încercări.

Metoda a doua se poate combina cu prima, pornind de la început cu o axă neutră probabilă, sau luînd în loc de R_1R_1' o altă dreaptă T_1T_1', deci $A_{2b}=T_1FT_1'$ etc.

B. SECȚIUNI DREPTUNGHIULARE

Metoda de calcul este cea expusă la secțiunile oarecare.

— Dacă secțiunea comprimată este un triunghi I_1CL_1 (fig. 4.7), se iau dreptele CH, CD ca axe Δ și Δ'.

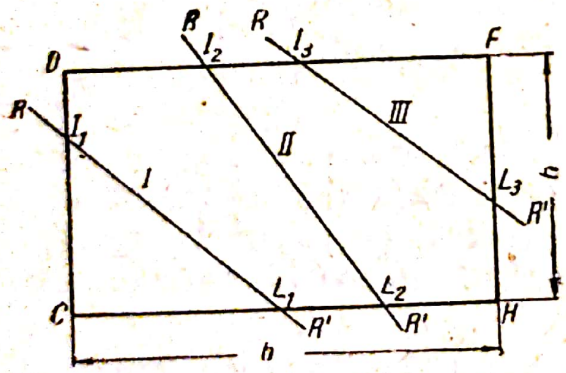

Fig. 4.7

— Cînd secțiunea comprimată este un trapez I_2DCL_2 (fig. 4.7), putem lua ca axe Δ, Δ', dreptele CH și CD.

Uneori este mai comod să fie luate ca axe Δ, Δ' dreptele FD, FH, însă atunci în loc de secțiunea A_f luăm $A_{f'}=A_f+CDFH$ și lucrăm cu suprafețele întinse I_2FHL_2, care intervin în formule cu semnul minus.

— În cazul cînd secțiunea comprimată este un pentagon I_3DCHL_3, se iau ca axe Δ, Δ', dreptele FD, FH și se lucrează cu secțiunile $A_{f'}=A_f+CDFH$ și I_3FL_3. Secțiunea I_3FL_3 intervine cu semnul minus.

§ 3. METODA A III-A

Această metodă se aplică mai ales atunci cînd, la culeele și pilele podurilor, la ziduri de sprijin etc. se pune problema armării zonelor întinse cu fiare de garanție. Presupunem date: forța N care acționează secțiunea, punctul său de aplicare $E(a, b)$, cum și rezistența admisibilă σ_b a betonului. Admitem că efortul unitar maxim în betonul comprimat este σ_b.

Alegem convenabil o axă neutră RR' (fig. 4.8) notată cu Δ.

Principiul de calcul este următorul:

Fiind dată axa neutră Δ și efortul unitar maxim de compresiune, se poate evalua forța N_c de compresiune care acționează zona comprimată. Se armează zona întinsă, armătura trebuind să preia o forță de întindere $N_t = N - N_c$.

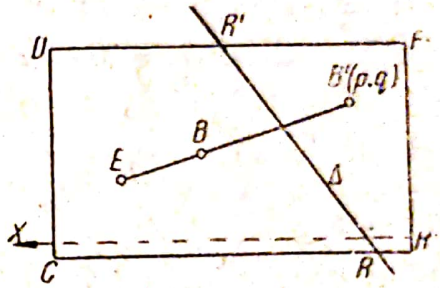

Fig. 4.8

Vom proceda astfel:

Determinăm punctul reciproc B al dreptei Δ în raport cu secțiunea comprimată $RCDR' = A_c$ și calculăm momentul static S al aceleiași secțiuni în raport cu Δ. Dacă, de exemplu, în punctul C avem efortul unitar σ_b, forța de compresiune N_c = rezultanta tuturor eforturilor de compresiune este:

$$N_c = \frac{\sigma_b}{s_C} S, \tag{4.21}$$

unde s_C este distanța de la punctul C la axa neutră Δ. Determinăm apoi rezultanta N_t a forțelor N_c, $-N$ și punctul B' de aplicare al ei.

Înlocuind mai sus pe N_c, avem:

$$N_t = N - \frac{\sigma_b}{s_C} S. \tag{4.22}$$

Poziția punctului B' este dată de distanța:

$$\overline{EB'} = \overline{EB} \cdot \frac{N_c}{N_t}. \tag{4.23}$$

După aceea alegem ca axe de coordonate sistemul format de axa Δ și o dreaptă oarecare X. Fie p, q distanțele punctului B' la Δ respectiv la X, distanțe care se determină grafic.

Armătura întinsă care se pune, trebuie să îndeplinească condițiile:

— efortul unitar maxim în ea să fie cel mult egal cu rezistența admisibilă a armăturii;

— rezultanta eforturilor unitare din armătura întinsă trebuie să fie egală cu N_t;

— reciprocul dreptei Δ în raport cu armătura întinsă trebuie să fie tocmai punctul B'.

Notăm cu $S_{\Delta f}$, $I_{\Delta f}$, $I_{\Delta Xf}$, momentul static, de inerție în raport cu Δ și centrifugal în raport cu Δ și X ale armăturii.

Condițiile enumerate mai sus se exprimă prin relațiile:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_b S_{\Delta f} &= s_C N_t \\ I_{\Delta f} &= p S_{\Delta f} \\ I_{\Delta Xf} &= q S_{\Delta f} \end{aligned}\right\} \qquad (4.24)$$

Notăm:

$$i = \frac{s_C}{\sigma_b} N_t \qquad (4.25)$$

și, în acest caz, relațiile (4.24) devin:

$$S_{\Delta f} = i; \quad I_{\Delta f} = pi; \quad I_{\Delta Xf} = qi. \qquad (4.26)$$

Condițiile (4.26) pot fi satisfăcute, deoarece dispunem de suficienți parametri ca: numărul și diametrul fiarelor, poziția armăturii etc.

Efortul unitar maxim în armătură, considerînd punctul T cel mai depărtat de axa neutră Δ, este:

$$\sigma_f = \frac{n\sigma_b}{s_C} s_T, \qquad (4.27)$$

unde s_T este distanța de la T la axa neutră Δ.

Observație. De multe ori în loc de Δ, se ia ca axă neutră reciproca punctului E în raport cu întreaga secțiune a betonului, considerînd că betonul rezistă la întindere. La fel, dîndu-se σ_b pentru compresiune, calculăm forța N_t de întindere dată de volumul eforturilor unitare de întindere $RHFR'$ și după aceea procedăm ca mai sus. În acest caz, punctul B' este reciprocul dreptei Δ în raport cu secțiunea $RHFR'$.

Condițiile (4.26) trebuie îndeplinite și în acest caz, iar efortul unitar în armătură se calculează cu formula (4.27).

CAPITOLUL V

BARE CURBE AVÎND CURBURĂ MARE

§ 1. DETERMINAREA EFORTURILOR UNITARE

Vom studia barele curbe care au curbură mare, ale căror secțiuni sînt solicitate excentric de o forță normală și care îndeplinesc următoarele condiții:

— Admit o axă, care este locul geometric al centrelor de greutate ale secțiunilor făcute normal pe această axă.

— Această axă este situată într-un plan, numit planul barei.

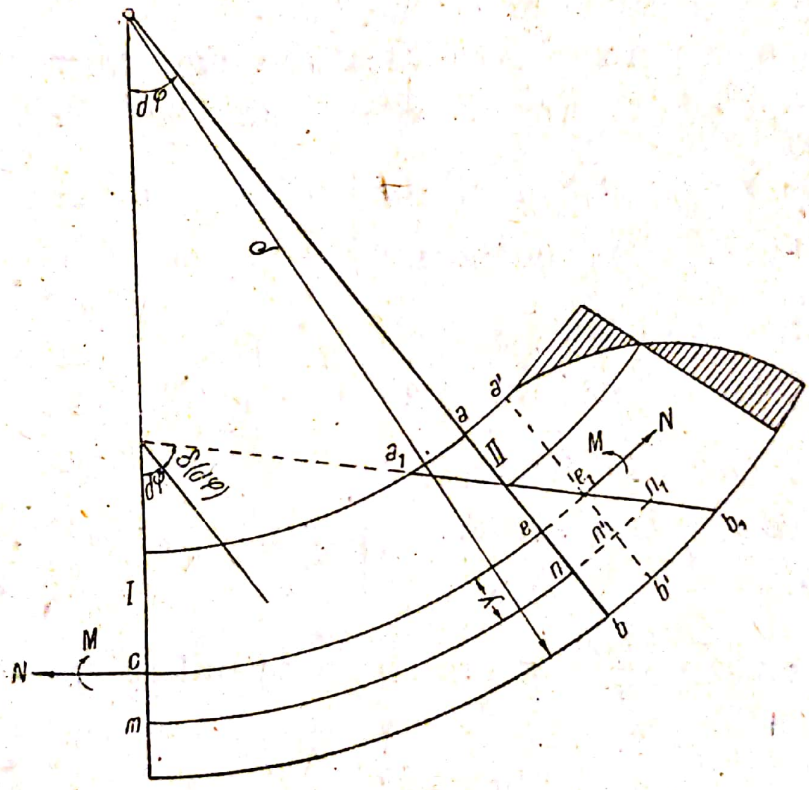

Fig. 5.1

— Secțiunile luate sînt normale pe axa piesei, fiecare trebuind să fie simetrică față de normala respectivă în planul barei dusă la axă prin centrul de greutate al secțiunii.

— Forțele care acționează secțiunea sînt situate în planul barei; în cazul momentelor, vectorii lor trebuie să fie normali pe planul barei.

Considerăm un element infinitezimal din bară, cuprins între două secțiuni infinit vecine *I* și *II* (fig. 5.1), înlocuind

acțiunile celor două părți îndepărtate cu cîte o forță N normală, aplicată în centrele de greutate ale fețelor secțiunilor elementului considerat și cu cîte un moment M. Notăm: cu ρ, raza de curbură în axa piesei, unde facem secțiunea ale cărei eforturi unitare le calculăm, cu $ds=\widehat{ce}$, lungimea arcului după axa elementului, cu $ds_y=\widehat{mn}$, lungimea arcului elementului la distanța y de axă și cu $d\varphi$ unghiul dintre razele de curbură în punctele de la extremitățile axei elementului considerat.

Fibrele, ne mai avînd aceeași lungime, ipotezele de calcul sînt mai greu de hotărît. Calculul se va face avînd la bază ipoteza lui Bernoulli și legea lui Hooke.

Sub acțiunea solicitărilor N și M, secțiunea ab se deformează și se deplasează devenind a_1b_1.

Putem considera că secțiunea ab ocupă întîi poziția $a'b'$ paralelă cu ab, apoi $a'b'$ se rotește în jurul lui e_1, ocupînd poziția finală a_1b_1.

Avem: $\delta(ds)=ee_1$, lungirea fibrei din axa neutră și $\varepsilon_0=\frac{\delta(ds)}{ds}$, lungirea sa specifică.

Lungirea la distanța y este:

$$\delta(ds_y)=nn_1=nn'+n'n_1=\delta(ds)+y\,\delta(d\varphi),$$

lungirea specifică la distanța y:

$$\varepsilon=\frac{\delta(ds_y)}{ds_y}=\frac{\delta(ds)+y\,\delta(d\varphi)}{(\rho+y)\,d\varphi}=\left[\frac{\rho\delta(ds)}{\rho\,d\varphi}+y\,\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}\right]\frac{1}{\rho+y},$$

și notînd cu $\omega=\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ deformația unghiulară specifică, obținem:

$$\varepsilon=(\rho\varepsilon_0+y\omega)\frac{1}{\rho+y}. \tag{5.1}$$

Efortul unitar în punctul corespunzător al secțiunii este:

$$\sigma=E(\rho\varepsilon_0+y\omega)\frac{1}{\rho+y}; \tag{5.2}$$

ε_0 și ω se determină scriind relațiile de echivalență dintre eforturi și solicitări:

$$\left.\begin{aligned}\int\sigma dA&=N\\ \int\sigma y dA&=M.\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Introducînd în (5.3) valoarea lui σ din relația (5.2) și ținînd seama că $\int y dA = 0$, obținem:

$$\left.\begin{aligned} EA\varepsilon_0 + E(\omega - \varepsilon_0)\int \frac{y}{\rho + y} dA = N \\ E(\omega - \varepsilon_0)\int \frac{y^2}{\rho + y} dA = M; \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

punînd:

$$\int \frac{y dA}{\rho + y} = -kA, \tag{5.5}$$

rezultă:

$$\int \frac{y^2 dA}{\rho + y} = k\rho A,$$

și cu aceasta ecuațiile (5.4) devin:

$$\left.\begin{aligned} EA\varepsilon_0 - E(\omega - \varepsilon_0)kA = N \\ E(\omega - \varepsilon_0)k\rho A = M. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Din ecuațiile (5.6) și (5.1) obținem pe ε_0, ω și ε:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{EA}\left(N + \frac{M}{\rho}\right) \\ \omega &= \frac{1}{EA}\left(N + \frac{M}{\rho} + \frac{M}{k\rho}\right) \\ \varepsilon &= \frac{1}{EA}\left(N + \frac{M}{\rho} + \frac{M}{k\rho} \cdot \frac{y}{\rho + y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

cu care expresia (5.2) devine:

$$\sigma = \frac{1}{A}\left[N + \frac{M}{\rho} + \frac{My}{k\rho(\rho + y)}\right]. \tag{5.8}$$

— Mai putem stabili [1]) expresiile lui ω și σ în funcție de un moment de inerție I' definit prin

$$\rho \int \frac{y^2 dA}{\rho + y} = I' = k\rho^2 A. \tag{5.9}$$

Cu această notație, din relația a doua din (5.4) scoatem:

$$\omega = \varepsilon_0 + \frac{M\rho}{EI'} = \frac{1}{EA}\left(N + \frac{M}{\rho}\right) + \frac{M\rho}{EI'}. \tag{5.10}$$

[1]) *M. M. Filonenko-Borodici*, Curs de rezistența materialelor, partea a doua, Editura Tehnică, 1952, pag. 49.

Scanned with OKEN Scanner

Cu valoarea lui ε_0 din relația (5.7) și a lui ω din (5.10), relația (5.2) devine:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{\rho A} + \frac{My}{I'} \cdot \frac{\rho}{\rho + y}. \tag{5.11}$$

— La barele curbe care au curbură mare, în cazul cînd secțiunea este solicitată numai de un moment, axa neutră nu mai trece prin centrul de greutate și este la o distanță y_0 de acesta, spre centrul de curbură:

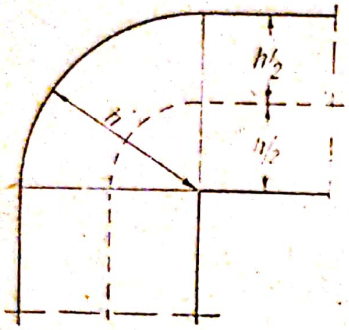

Fig. 5.2

$$y_0 = -\frac{I'\rho}{I' + A\rho^2}, \tag{5.12}$$

care nu depinde de moment.

— Relația (5.11) arată că σ variază hiperbolic în raport cu y.

— Din relația (5.8) sau (5.11) se vede că în cazul unui colț ascuțit, ca în fig. 5.2, cu $\rho = \frac{h}{2}$, în interior la colț $y = -\frac{h}{2}$ și obținem $\sigma = \infty$; prin deformația plastică însă efortul specific se reduce.

§ 2. ELEMENTE GEOMETRICE ALE BARELOR CURBE

Pentru a găsi efortul unitar σ în secțiunile barelor curbe, folosim relația (5.8) sau (5.11), pentru aplicarea cărora trebuie să găsim valorile lui k, ρ respectiv I', ρ.

A. CALCULUL LUI k

Analitic, se calculează expresia lui k din relația:

$$k = -\frac{1}{A}\int \frac{ydA}{\rho + y}, \tag{5.13}$$

direct, cînd expresia are o formă simplă, sau prin dezvoltare în serie în caz contrar.

De exemplu, pentru o secțiune dreptunghiulară de lățime b și înălțime h, avem:

$$k = -1 + \frac{\rho}{h} \ln \frac{2\rho + h}{2\rho - h}, \tag{5.14}$$

sau, sub formă de serie:

$$k=\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^4+\frac{1}{7}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^6+\ldots \qquad (5.15)$$

Pentru o secțiune circulară de rază r, se dezvoltă de la început în serie integrala care dă pe k și, integrînd termen cu termen, obținem:

$$k=\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\rho}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{\rho}\right)^4+\frac{5}{64}\left(\frac{r}{\rho}\right)^6+\ldots \qquad (5.16)$$

Grafic, valoarea lui k se poate deduce astfel: se dă secțiunea A (fig. 5.3); fie O centrul de curbură, G centrul de greutate al secțiunii, iar GO axa de simetrie a secțiunii. Luăm ca axe de referință xGy, axa de simetrie ca axă y și perpendiculara în G pe ea ca axă x.

Unim punctul O cu un punct M al secțiunii și fie Q intersecția lui OM cu Gx și N proiecția lui Q pe paralela PM dusă la Gx. Din triunghiurile asemenea OPM și QNM avem:

$$\overline{MN}=\overline{PM}\,\frac{y}{\rho+y},$$

și cum $\overline{PM}\,dy=dA$:

$$-kA=\int\overline{MN}\,dy=\int\frac{y\,dA}{\rho+y}; \qquad (5.17)$$

de aici rezultă k:

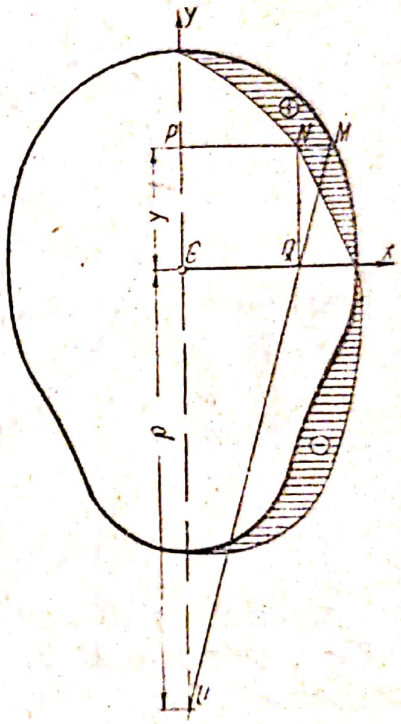

Fig. 5.3

$$k=-\frac{1}{A}\int\overline{MN}\,dy. \qquad (5.18)$$

Deci suprafața închisă între conturul secțiunii și curba descrisă de N, multiplicată cu $-\frac{1}{A}$, dă valoarea lui k. Această suprafață este simetrică în raport cu Oy.

B. CALCULUL RAZEI DE CURBURĂ

Raza de curbură ρ, necesară calculului eforturilor unitare în secțiunile barelor care au curbură mare, se calculează ușor cînd cele două curbe din planul barei sînt cercuri

concentrice și piesa are aceeași secțiune peste tot. Calculul devine greoi dacă cele două cercuri nu mai au același centru, și laborios în cazul general.

Vom trata cazul cînd conturul barei în planul axei sale este format din două cercuri oarecare, determinînd raza de curbură în punctul O al axei, în care secțiunea piesei este minimă, apoi într-un punct oarecare al axei.

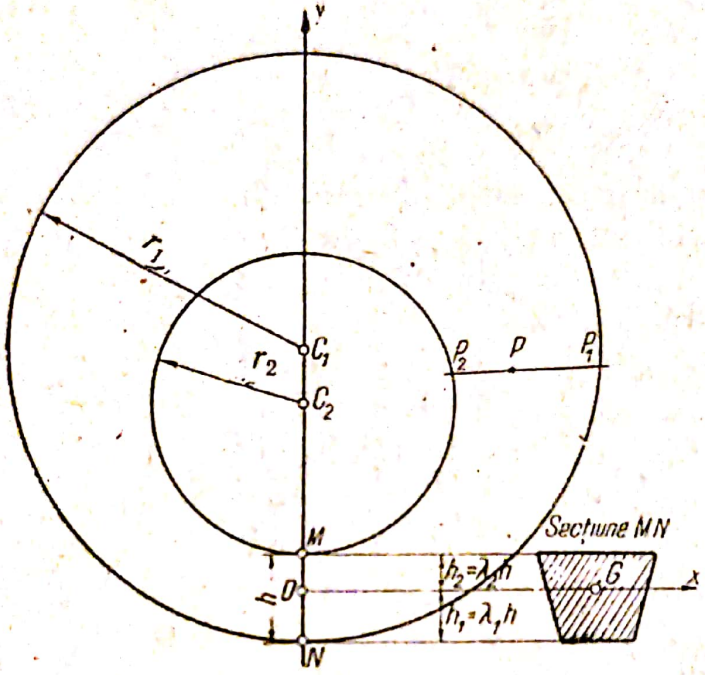

Fig. 5.4

Găsim întîi ecuația diferențială a axei Γ a barei. Vom scrie pentru aceasta că normala într-un punct curent P al curbei Γ (fig. 5.4) este intersectată de cele două cercuri C_1 și C_2, respectiv în P_1 și P_2, astfel ca $\overline{P_1P}=\lambda_1\overline{P_1P_2}$ și $\overline{P_2P}=\lambda_2\overline{P_1P_2}$ (centrul de greutate al piesei împarte în acest caz segmentul $\overline{P_1P_2}$ în același raport constant $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$), de unde deducem relația $\lambda_2\overline{P_1P}=\lambda_1\overline{P_2P}$. Notăm: $\delta=\overline{P_1P_2}$, $\delta_1=\overline{P_1P}=\lambda_1\delta$ și $\delta_2=\overline{P_2P}=\lambda_2\delta$.

Ecuația diferențială a curbei Γ este:

$$\lambda_2|\delta_1|=\lambda_1|\delta_2|. \tag{5.19}$$

Alegem sistemul de referință xOy, axa y trecînd prin linia centrelor. Ecuațiile cercurilor sînt, respectiv:

$$\left.\begin{aligned} x^2+[y-(r_1-\lambda_1 h)]^2&=r_1^2\\ x^2+[y-(r_2-\lambda_2 h)]^2&=r_2^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

Notăm cu $y=y(x)$ ecuația curbei Γ; ecuația normalei în punctul $P(x, y)$ al ei este:

$$X-x+y'(Y-y)=0. \tag{5.21}$$

Distanța δ_1 se scrie:

$$\delta_1^2=(X-x)^2+(Y-y)^2.$$

Scoțînd valorile lui X, Y (coordonatele intersecției cercului cu normala) din prima ecuație (5.20) și din (5.21), și introducîndu-le aici, obținem pe δ_1. Asemănător se află și δ_2.

Pentru prescurtare, notăm:

$$u_1=-y+r_1-\lambda_1 h; \quad u_2=-y+r_2+\lambda_2 h \tag{5.22}$$

și astfel δ_1 și δ_2 se exprimă:

$$\delta_{1,2}=\frac{xy'+u_{1,2}\pm\sqrt{(xy'+u_{1,2})^2-(x^2+u_{1,2}^2-r_{1,2}^2)(1+y'^2)}}{\pm\sqrt{1+y'^2}}. \tag{5.23}$$

Pentru δ_1, trebuie să luăm radicalii cu semnul minus, deoarece semnul plus corespunde celuilalt punct de intersecție al normalei cu cercul C_1.

Pentru δ_2 luăm în fața radicalului de la numărător semnul minus, iar de la numitor semnul plus.

Punînd condiția dată de relația (5.19), avem:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_2\left[-xy'+y-r_1+\sqrt{(xy'+u_1)^2-(x^2+u_1^2-r_1^2)(1+y'^2)}\right]=\\&=\lambda_1\left[xy'-y+r_2-\sqrt{(xy'+u_2)^2-(x^2+u_2^2-r_2^2)(1+y'^2)}\right]\end{aligned}\right\} \tag{5.24}$$

Ecuația (5.24) reprezintă ecuația diferențială a curbei Γ. Obișnuit ea este greu de integrat.

a) **Determinarea razei de curbură în O fără integrarea ecuației diferențiale (5.24).**

Raza de curbură este dată de relația:

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \tag{5.25}$$

unde y', y'' sînt derivatele curbei Γ calculate în O.

Axa Γ, fiind simetrică în raport cu axa Oy, ecuația ei dezvoltată în serie are forma:

$$y=a_2x^2+a_4x^4+a_6x^6+\ldots \tag{5.26}$$

care are derivatele:

$$\left.\begin{aligned} y' &= 2a_2x + 4a_4x^3 + 6a_6x^5 + \dots \\ y'' &= 2a_2 + 12a_4x^2 + 30a_6x^4 + \dots \end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

Aceste derivate pentru $x=0$, în origine au valorile:

$$y'=0, \quad y''=2a_2 \tag{5.28}$$

care, înlocuite în (5.25), dau:

$$\rho = \frac{1}{2a_2}. \tag{5.29}$$

Pentru a găsi valoarea lui a_2, derivăm ecuația (5.24) și obținem:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_2\left[-xy'' + \frac{xy''(xy'+u_1)-(x+y'u_1)(1+y'^2)-(x^2+u_1^2-r_1^2)y'y''}{\sqrt{(xy'+u_1)^2-(x^2+u_1^2-r_1^2)(1+y'^2)}}\right] = \\ &= \lambda_1\left[xy'' + \frac{xy''(xy'+u_2)-(x+y'u_2)(1+y'^2)-(x^2+u_2^2-r_2^2)y'y''}{\sqrt{(xy'+u_2)^2-(x^2+u_2^2-r_2^2)(1+y'^2)}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

În formula (5.25), y, y', y'' au valorile date de relațiile (5.26) și (5.27). Cum în relația (5.25) vom face ca $x \to 0$, vom lua pentru y, y', y'' termeni pînă la infiniți mici de ordinul I în raport cu x inclusiv. Luăm: $y \approx 0$, $y' \approx 2a_2x$, $y'' \approx 2a_2$, care înlocuite în (5.30) dau:

$$4h^2\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda_1}{r_1}+\frac{\lambda_2}{r_2}\right)a_2^2 + 4\left[\lambda_1\lambda_2 h\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)-\frac{1}{2}\right]a_2 + \frac{\lambda_2}{r_1}+\frac{\lambda_1}{r_2} = 0, \tag{5.31}$$

care este ecuația din care se obține a_2.

Eliminînd pe a_2 între (5.29) și (5.31), obținem ecuația care dă raza de curbură ρ a axei piesei în punctul 0:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1r_1+\lambda_2r_2)\rho^2 - [2\lambda_1\lambda_2h(r_1-r_2)+r_1r_2]\rho + \\ &+\lambda_1\lambda_2h^2(\lambda_1r_2+\lambda_2r_1) = 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Dacă punem în evidență pe h_1 și h_2, ecuația care dă raza de curbură este:

$$(h_1r_1+h_2r_2)\rho^2 - [2h_1h_2(r_1-r_2)+hr_1r_2]\rho + h_1h_2(h_2r_1+h_1r_2) = 0. \tag{5.33}$$

Înaintea radicalului care rezultă din rezolvarea ecuației în ρ, se va lua semnul plus.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Se vede că, în anumite condiții, ecuația (5.33) poate da rădăcini imaginare. Rezultă că în acest caz bara nu are axă reală și nu mai putem aplica formulele (5.8), (5.11) stabilite.

Caz particular. Să presupunem că secțiunea prin piesă este cerc, elipsă, dreptunghi etc., așa fel încît centrul de greutate al acestor secțiuni să fie la mijlocul segmentului P_1P_2; în acest caz $h_1=h_2=\frac{h}{2}$ și ecuația (5.33) devine:

$$(r_1+r_2)\rho^2-[h(r_1-r_2)+2r_1r_2]\rho+\frac{h^2}{4}(r_1+r_2)=0, \qquad (5.34)$$

de unde:

$$\rho=\frac{h(r_1-r_2)+2r_1r_2+2\sqrt{r_1r_2(r_1-h)(r_2+h)}}{2(r_1+r_2)}. \qquad (5.35)$$

Valoarea lui ρ este imaginară pentru $h>r_1$ și în acest caz bara nu are axă reală, iar formulele care dau pe σ nu se mai aplică.

b) **Determinarea razei de curbură în altă secțiune.** În acest caz problema prezintă două părți: determinarea precisă a secțiunii și determinarea razei de curbură.

— Din cauză că nu cunoaștem axa barei, nu putem cunoaște inițial cu precizie secțiunea, pentru care nu avem decît indicații. Vom lua un punct $B_1(x_1, y_1)$, pe care îl aproximăm în axa barei după desen, acolo unde vrem să facem o nouă verificare. De exemplu, s-ar putea să fie impusă ordonata y_1 a punctului de pe axă în care trebuie să facem verificarea secțiunii.

Introducem valorile x_1, y_1 în ecuația diferențială (5.24) din care aflăm pe y_1'. Cu x_1, y_1 și y_1' din ecuațiile (5.22), (5.23) calculăm valorile lui δ_1 și δ_2; fie acestea $\delta_1^{(1)}$ și $\delta_2^{(1)}$. Dacă $\delta_1^{(1)}$ și $\delta_2^{(1)}$ nu verifică relația (5.19), se ia o altă valoare pentru x, de exemplu x_2, și cu x_2, y_1 se procedează la fel, determinîndu-se întîi y_2', apoi $\delta_1^{(2)}$ și $\delta_2^{(2)}$; dacă relația (5.19) este verificată, punctul $B_2(x_2, y_1)$ este pe axa barei. În caz contrar se continuă aproximarea.

— Presupunem că am determinat punctul $B_0(x_0, y_0)$ de pe axa barei. Să găsim raza de curbură în acest punct.

Dezvoltăm funcția în serie întreagă în jurul lui $x=x_0$ și avem:

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ldots \qquad (5.36)$$

ale cărei derivate sînt

$$\left.\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots \\ y'' &= 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \dots . \end{aligned}\right\} \tag{5.37}$$

Pentru $x=x_0$ avem:

$$y_0 = a_0, \quad y_0' = a_1, \quad y_0'' = 2a_2. \tag{5.38}$$

Raza de curbură este dată deci de relația:

$$\rho = \frac{(1+a_1^2)^{3/2}}{2a_2}. \tag{5.39}$$

Valoarea lui $y_0' = a_1$ o găsim din ecuația (5.24) în care facem $x=x_0$ și $y=y_0$.

Valoarea lui $a_2 = \frac{y_0''}{2}$, o găsim din ecuația (5.30), unde punem $y=a_0=y_0$; $x=x_0$; $y'=y_0'$ și $y''=2a_2$.

Se poate rezolva problema și în cazul general, cînd cele două curbe din planul axei în loc de cercuri au forme oarecare.

CAPITOLUL VI

APLICAȚII

Aplicația 1. Pentru o secțiune A, s-au determinat figurile reciproce (dr Δ; B), (dr Δ'; B') fig. 6.1. Să se deducă din acestea și alte figuri reciproce.

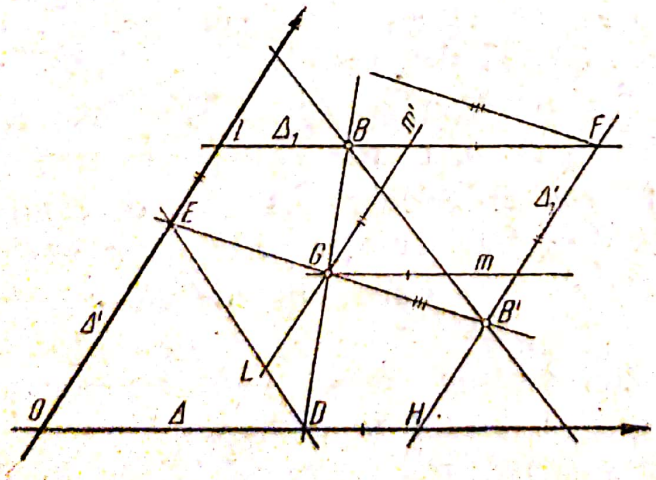

Fig. 6.1

Avem date (dr Δ; B) (dr Δ'; B'), rezultă imediat: (dr BB'; O) (dr GB; dir m), (dr GB'; dir m'), (dr Δ_1; D), (dr Δ_1'; E) (dr DE, F) (dr EB; H), (dr $B'D$, I).

In modul acesta putem găsi oricîte figuri reciproce. Astfel putem găsi dreptele reciproce ale punctelor care rezultă din intersecțiile dreptelor precedente. De exemplu, să găsim dreapta reciprocă a punctu-

lui L. Reciproca lui L trece prin punctul F, deoarece L se găseşte pe dreapta DE şi (dr DE; F). Afară de aceasta, toate punctele de pe dreapta GL au ca reciproce drepte care trec prin punctul P de la infinit al dreptei GB' pentru că (dr GL; dir GB').

Rezultă că reciproca punctului L este dreapta FM dusă prin F, paralelă la GB'.

Problema prezintă importanţă, deoarece se pot determina mai multe puncte de pe axa neutră pe care o căutăm.

Aplicaţia 2. Se dă secţiunea în formă de patrulater din fig. 6.2 şi se cere să se găsească punctul reciproc B al laturii CD.

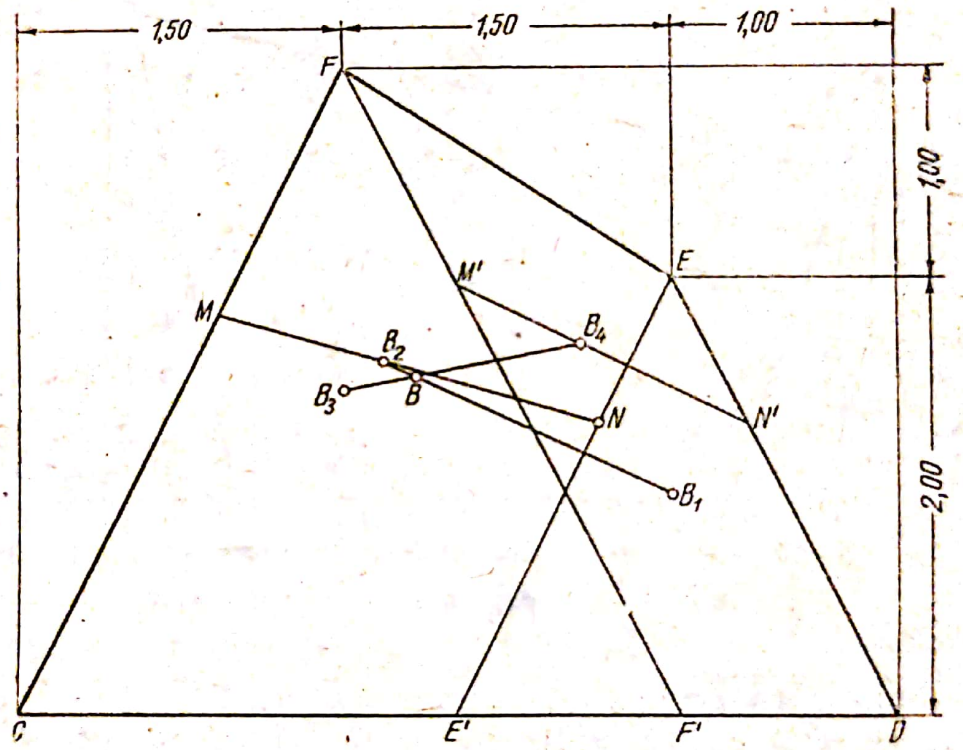

Fig. 6.2

Ducem $EE' \parallel CF$ şi determinăm punctele reciproce ale dreptei CD în raport cu triunghiul $E'ED$ şi cu trapezul $CE'EF$.

Reciprocul dreptei CD în raport cu triunghiul $E'ED$ este punctul B_1, mijlocul medianei corespunzătoare laturii $E'D$.

Reciprocul dreptei CD în raport cu trapezul $CE'EF$ îl găsim cu ajutorul tabelei de la cap. II § 4. Avem: $\alpha = \frac{\overline{EE'}}{\overline{CF}} = \frac{2,25}{3,32} = 0,68$ şi găsim $\eta_3 = 0,437\,3$, deci $\overline{MB_2} = \eta_3 \cdot \overline{MN} = 0,437\,3 \times 1,8 = 0,786$ (MN se obţine unind treimile bazelor).

Se procedează asemănător, ducînd $FF' \parallel ED$ și se găsesc punctele reciproce B_3 și B_4 ale laturii CD în raport cu triunghiul CFF', respectiv cu trapezul $FF'DE$. Pentru B_4, avem $\overline{M'B_4} = 0{,}437\,3 \cdot 1{,}45 = 0{,}63$ (unde $M'N'$ este dreapta care unește treimile bazelor trapezului).

Punctul B căutat este la intersecția dreptelor B_1B_2, B_3B_4.

Aplicația 3. Un masiv de zidărie are secțiunea $CFKL$ (fig. 6.3) și este solicitat în punctul E de o forță normală de compresiune $N = 400$ t. Se cere să se determine axa neutră corespunzătoare punctului E și eforturile unitare în cele patru vîrfuri ale secțiunii.

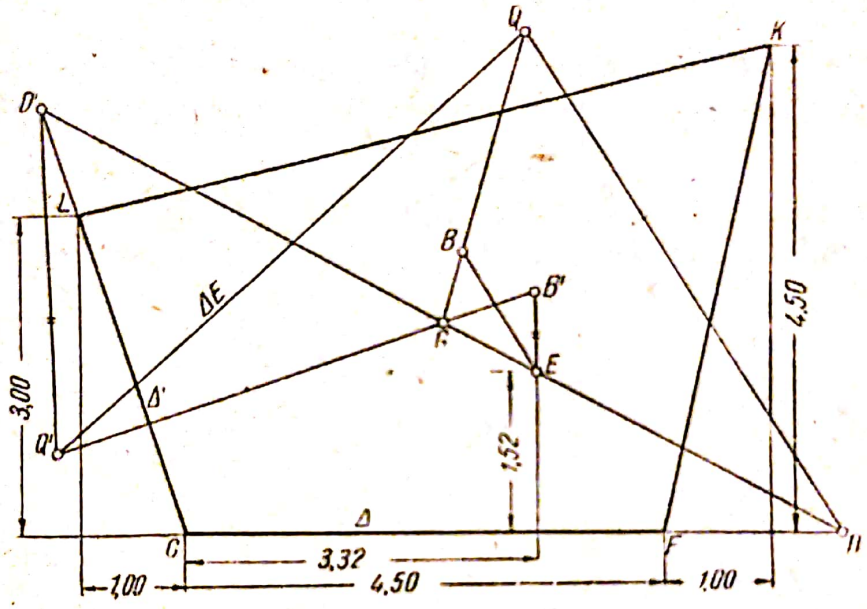

Fig. 6.3

Se consideră respectiv laturile secțiunii CF și CL ca axe Δ, Δ' și se află ca în aplicația 2, punctele reciproce B, B' ale acestor axe în raport cu secțiunea dată. Se determină apoi G.

După aceasta, se consideră date (dr Δ, Δ'; B, B') și cu ajutorul metodei grafice din fig. 3.7 determinăm axa neutră corespunzătoare punctului E. Astfel, ducem dreapta GE care intersectează axele Δ, Δ' în punctele D și D'. Paralelele duse prin D și D' la EB, respectiv EB', întîlnesc dreptele GB și GB' în punctele Q respectiv Q'.

Dreapta QQ' este axa neutră Δ_E căutată.

Pentru determinarea eforturilor unitare în vîrfurile secțiunii, aplicăm formula (1.24) $\sigma = \frac{N}{S} s$.

Avem aria secțiunii:

$$A=\frac{4,50+3,00}{2}\cdot 6,50-\frac{1,00\cdot 3,00}{2}-\frac{1,00\cdot 4,50}{2}=21,10\ \text{m}^2,$$

iar distanța de la G la Δ_E este $\delta=1,47$ m, cu care:

$$S_{\Delta E}=21,10\cdot 1,47=31,00\ \text{m}^3.$$

Distanțele măsurate de la vîrfurile secțiunii C, F, K, L la Δ_E sînt $s_C=1,37$ m, $s_F=4,35$ m, $s_K=1,62$ m, $s_L=1,50$ m.

Eforturile unitare în vîrfurile secțiunii sînt:

$$\sigma_C=\frac{400}{31}\cdot 1,37=1,77\ \text{kg/cm}^2;$$

$$\sigma_F=\frac{400}{31}\cdot 4,35=5,60\ \text{kg/cm}^2;$$

$$\sigma_K=\frac{400}{31}\cdot 1,62=2,08\ \text{kg/cm}^2;$$

$$\sigma_L=-\frac{400}{31}\cdot 1,50=-1,93\ \text{kg/cm}^2,$$

unde σ_L este de întindere.

Aplicația 4. Un masiv de zidărie are secțiunea $CLKF$, cu dimensiunile din fig. 6.4, care este solicitată de o forță de compresiune $N=500$ t. Să se determine eforturile unitare maxime de compresiune și întindere.

Vom rezolva problema pe cale analitică.

Alegem dreptele CL, CF ca axe Δ și Δ'. Cu formulele (2.18 b) determinăm punctele B, B', reciprocele dreptelor Δ și Δ' (sistemul de referință fiind diagonalele).

Coordonatele lui B sînt:

$$y_B=\delta_{CK}=\frac{1}{4}\,\frac{\left(1+2\dfrac{s_F}{s_K}\right)h_F^2-h_L^2}{\left(1+\dfrac{s_F}{s_K}\right)h_F-h_L}=1,06\ \text{m};$$

$$x_B=\delta_{LF}=\frac{1}{4}\,\frac{\left(1+2\dfrac{s_K}{s_F}\right)h_K^2-h_C^2}{\left(1+\dfrac{s^K}{s_F}\right)h_K-h_C}=0,63\ \text{m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog se găsesc coordonatele lui B': $y_{B'}=\delta_{CK}=0{,}07$ m, $x_{B'}=\delta_{LF}=0{,}80$ m.

Determinăm și centrul de greutate G al secțiunii.

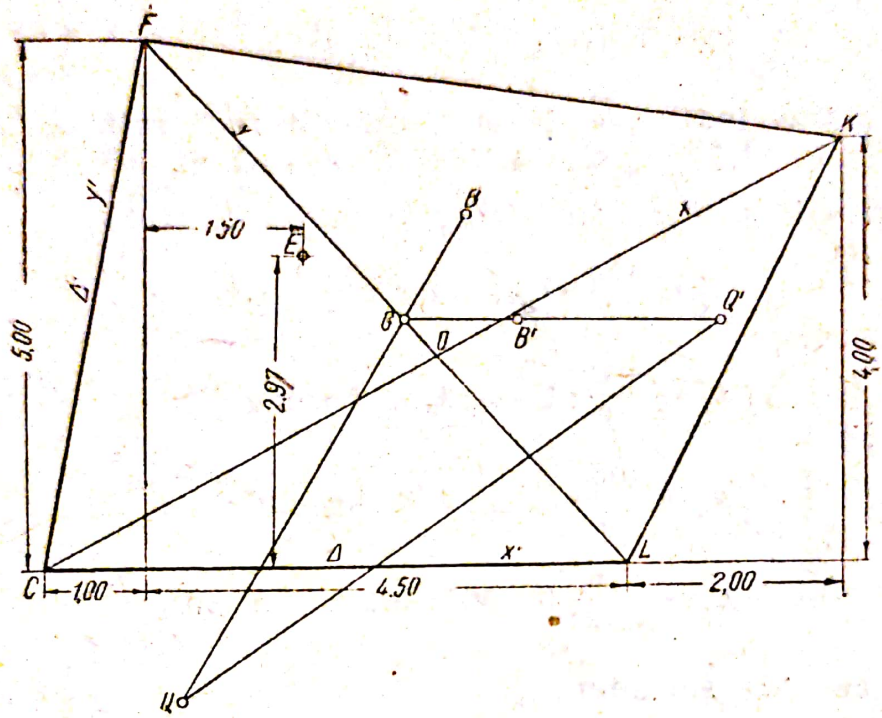

Fig. 6.4

Mai departe putem proceda grafic, ca la problema precedentă, sau analitic.

Vom proceda analitic, aplicînd formulele (3.4).

Luăm axe de referință pe Δ și Δ' și în acest sistem avem: $G(2{,}95;\ 2{,}40)$; $E(1{,}90;\ 3{,}04)$; $B(3{,}33;\ 3{,}38)$ și $B'(4{,}01;\ 2{,}37)$.

Punctul Q este pe GB și are ordonata:

$$y_Q=\frac{2{,}40\,(3{,}38-3{,}04)}{2{,}40-3{,}04}=-1{,}27\ \text{m}.$$

Punctul Q' se află pe GB' și are abscisa:

$$x'_{Q'}=\frac{2{,}95\,(4{,}01-1{,}90)}{2{,}95-1{,}90}=5{,}92\ \text{m}.$$

Aria și momentul static al secțiunii în raport cu axa neutră QQ' sînt:

$$A=27{,}7\ \text{m}^2;\quad S=47{,}6\ \text{m}^3.$$

Eforturile unitare maxime au loc în F și L:

$$\sigma_F = \frac{500}{47,6} \cdot 5,40 = 5,67 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresiune)};$$

$$\sigma_L = -\frac{500}{47,6} \cdot 1,35 = -1,42 \text{ kg/cm}^2 \text{ (întindere)}.$$

Aplicația 5. Culeea unui pod oblic, având fundația comună cu zidurile întoarse, are forma din fig. 6.5. Cunoscînd că această fundație este solicitată în punctul E de o forță normală $N=600$ t, se cer presiunile pe terenul de fundație în vîrfurile exterioare ale secțiunii.

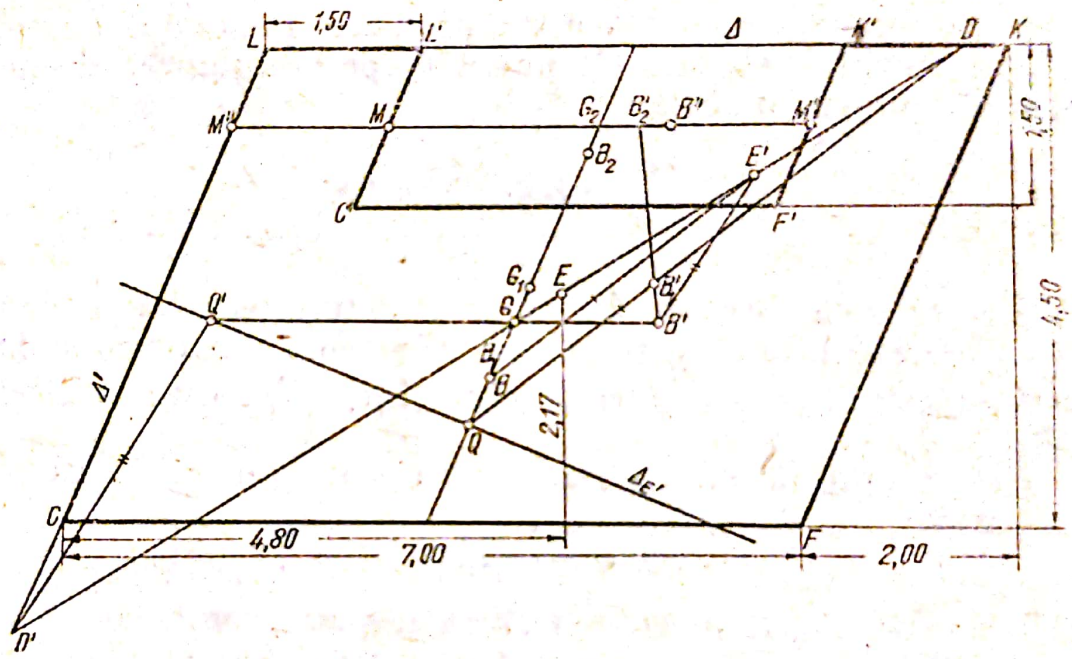

Fig. 6.5

Considerăm respectiv laturile LK, CL ca axe Δ, Δ' și le căutăm punctele reciproce B, B' în raport cu secțiunea.

Reciprocul B îl aflăm astfel: avem imediat reciprocele B_1, B_2 al dreptei Δ respectiv în raport cu paralelogramele $CFKL$ și $C'F'K'L'$. Considerăm în B_1 și B_2 mărimile $S_1, -S_2$, unde S_1, S_2 sînt momentele statice ale secțiunilor $CFKL$ și $C'F'K'L'$ în raport cu Δ.

B este punctul de aplicare al rezultantei mărimilor $S_1, -S_2$.

Reciprocul B' al dreptei Δ' îl aflăm astfel: avem imediat reciprocul B'_1 al lui Δ' în raport cu paralelogramul $CFKL$. Reciprocul B'_2 al dreptei Δ' în raport cu secțiunea $C'F'K'L'$ se află cu formula (2.13) și fig. 2.24, deoarece se cunoaște

reciprocul B'' al dreptei $C'L'$ (care este paralelă cu Δ') în raport cu aceeaşi secţiune. El se află pe dreapta MM' şi are poziţia dată de distanţa:

$$\overline{MB_2'} = \frac{\overline{MG_2}}{\overline{M''G_2}}\,\overline{M''B''} = \frac{2{,}00}{3{,}50}\cdot 4{,}14 = 2{,}37 \text{ m.}$$

Asemănător cu cele de mai sus, în punctele B_1', B_2' considerăm respectiv mărimile S_1', $-S_2'$, momentele statice ale secţiunilor $CFKL$, $C'F'K'L'$ în raport cu drepta Δ'. Punctul B' este punctul de aplicare al rezultantei mărimilor S_1', $-S_2'$. Aflăm centrul G de greutate al secţiunii $CFKK'F'C'L'L$.

Deoarece axa neutră corespunzătoare punctului E cade în afara cadrului, alegem alt punct E' pe prelungirea dreptei GE, unde punem o forţă

$$N' = N\frac{\overline{EG}}{\overline{E'G}} = 600\,\frac{0{,}52}{3{,}13} = 100 \text{ t.}$$

Avînd date (dr Δ, Δ'; B, B'), determinăm axa neutră $\Delta_{E'}$, corespunzătoare punctului E' şi apoi cu formula (3.5) găsim presiunile pe teren cînd forţa N este aplicată în E.

Aria secţiunii date şi momentul static al ei în raport cu $\Delta_{E'}$ sînt:

$$A = 7{,}00\cdot 4{,}50 - 4{,}00\cdot 1{,}50 = 24 \text{ m}^2;$$

$$S_{\Delta_{E'}} = 24{,}00\cdot 1{,}07 = 25{,}70 \text{ m}^3.$$

Distanţele de la vîrfurile secţiunii C, F, K, L la $\Delta_{E'}$ sînt respectiv 2,32; 0,31; 5,22; 2,30 m.

Obţinem:

$$\sigma_C = \frac{100}{25{,}70}\cdot 2{,}32 + \frac{600-100}{24} = 2{,}98 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_F = \frac{100}{25{,}70}\cdot 0{,}37 + \frac{500}{24} = 2{,}20 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_K = 4{,}11 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_L = 2{,}97 \text{ kg/cm}^2.$$

Observaţie. Pentru aflarea axei neutre $\Delta_{E'}$ prin punctele Q, Q' se putea folosi metoda analitică, utilizînd formulele (3.4).

Scanned with OKEN Scanner

Aplicația 6. Se dă secțiunea unei culee oblice, care are dimensiunile din fig. 6.6 (paralelogram), și se cere să se determine direcțiile principale centrale și momentele principale centrale prin metoda indicată în cap. I, § 6, c.

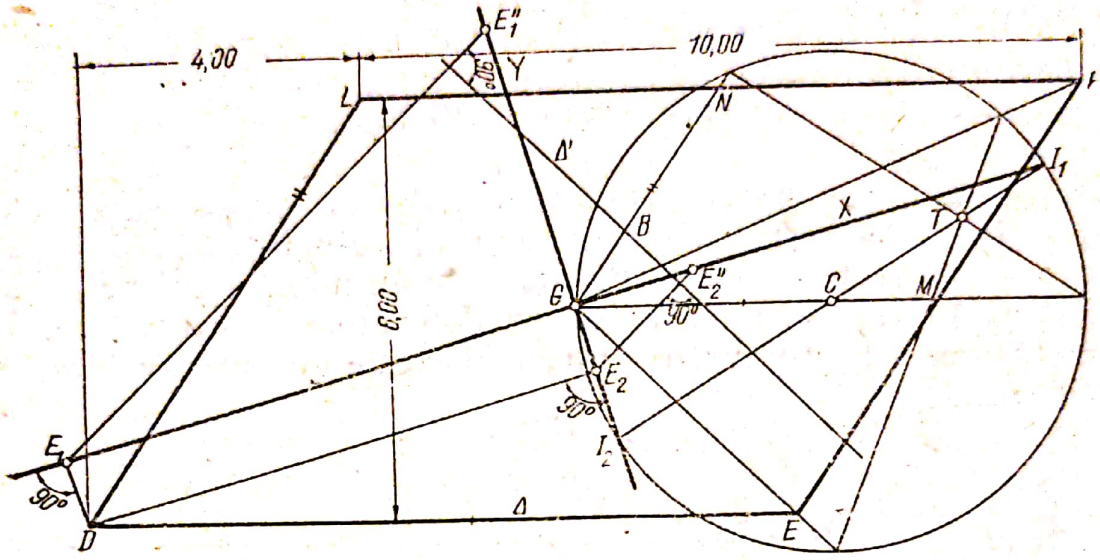

Fig. 6.6

In centrul de greutate G avem o involuție determinată de perechile de raze (dreptele care unesc mijloacele laturilor secțiunii), (cele două diagonale ale secțiunii). Direcțiile principale sînt raze omoloage perpendiculare ale involuției.

Calculăm aria $A=10\cdot 6=60$ m^2.

Considerăm reciproca Δ' a punctului D (dr Δ' trece prin treimile dreptelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale secțiunii). Avem:

$$S_{\Delta'}=60\cdot 1{,}17=70 \text{ m}^3.$$

Construim la o scară oarecare cercul C cu raza $=\frac{S_{\Delta'}}{2}\left[\frac{\text{m}^3}{\text{m}^2}\right]=$ $=35$ m, care trece prin G și, avînd cunoscute perechile de raze (GM, GN), (GF, GE), determinăm centrul T de involuție. Dacă punctele I_1, I_2 sînt intersecțiile dreptei TC cu cercul, atunci direcțiile principale sînt GI_1 și GI_2.

Momentele de inerție principale le aflăm cu ajutorul formulelor (1.46), care dau: $I_1=k\cdot\overline{TI_1}$ și $I_2=k\cdot\overline{TI_2}$, unde k este dat de formula (1.53). Pentru a determina pe k ducem din D, perpendicularele DE_1 și DE_2 pe axele principale X, Y. Din

punctele E_1, E_2 ducem perpendiculare pe dreapta Δ', care întîlnesc axele Y și X în E_1'' și E_2''. Avem:

$$k = E_1E_1'' + E_2E_2'' = 8{,}50 + 1{,}95 = 10{,}45;$$

$$I_1 = 10{,}45 \cdot 13{,}50 = 141 \text{ m}^4;$$

$$I_2 = 10{,}45 \cdot 56{,}50 = 589 \text{ m}^4.$$

Aplicația 7. Culeele unui pod oblic au la un rost secțiunea (paralelogram) cu dimensiunile din fig. 6.7. În caz cînd această secțiune este solicitată de un moment $M = 300$ tm dirijat ca în figură, se cere să se determine axa neutră corespunzătoare și eforturile unitare maxime de compresiune și întindere.

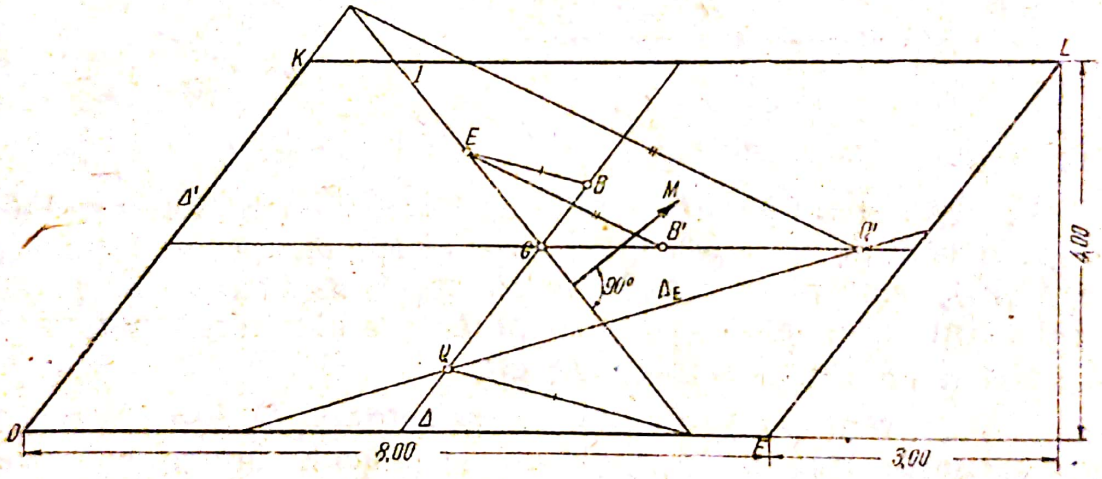

Fig. 6.7

Ducem dreapta GI normală pe direcția vectorului moment și luăm pe aceasta, într-un punct E oarecare (cu condiția ca axa neutră a lui E să fie în cadrul figurii), o forță N determinată de $N = \frac{M}{GE}$. Construim axa neutră corespunzătoare punctului E, iar cu formula (1.27) determinăm eforturile unitare.

Luăm pentru Δ, Δ' dreptele DF și DK. Deci avem date (dr Δ, Δ'; B, B').

Axa neutră Δ_E, corespunzătoare punctului E, o găsim aplicînd construcția din fig. 3.7. Eforturile unitare maxime

de compresiune și întindere sînt în punctele K respectiv F. Punctul K este la distanța 3,60 de Δ_E. Avem:

$$A=8\cdot 4=32\ \text{m}^2,\quad S_{\Delta_E}=0{,}97\cdot 32=31{,}10\ \text{m}^3,$$

$$N=\frac{300}{1{,}27}=237\ \text{t}.$$

Deci rezultă:

$$\sigma_{max}=\pm\left(\frac{N}{S_{\Delta_E}}s-\frac{N}{A}\right)=\pm\left(\frac{237}{31{,}10}\cdot 3{,}60-\frac{237}{32}\right)=\pm 2{,}00\ \text{kg/cm}^2.$$

Aplicația 8. O culee oblică are secțiunea trapezoidală cu dimensiunile din fig. 6.8 și este solicitată în punctul E de forța $N=700$ t. Se cere:

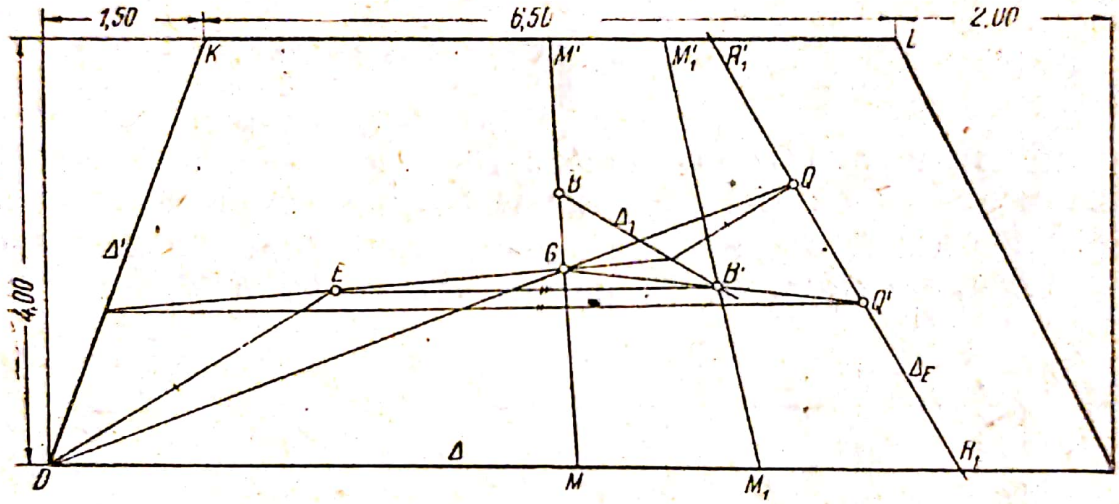

Fig. 6.8

a) Să se determine axa neutră corespunzătoare și să se găsească eforturile unitare maxime de compresiune și întindere.

b) In ipoteza că lucrează numai secțiunea activă, să se găsească efortul unitar maxim de compresiune.

Luăm dreptele DF și DK, ca axe Δ, Δ'. Reciprocele B, B' ale axelor Δ, Δ' le găsim cu ajutorul tabelei din cap. II, § 4. Pentru $\alpha=0{,}65$ rezultă $\eta_0=0{,}464$, $\eta_1=0{,}641$, $\eta_3=0{,}430$ și deci:

$$\overline{MG}=\eta_0\overline{MM'}=0{,}464\cdot 4{,}03=1{,}87,\quad \overline{MB}=0{,}641\cdot 4{,}03=2{,}59;$$

$$\overline{M_1B'}=\eta_3\overline{M_1M_1'}=0{,}430\cdot 4{,}10=1{,}76.$$

Dacă pentru aflarea axei neutre Δ_E corespunzătoare punctului E, folosim ca date (dr Δ, Δ'; B, B'), observăm că

dreapta GE întîlnește Δ în afara cadrului. Vom lua dreapta BB' notată Δ_1, în locul lui Δ. Se vede că dreptei Δ_1 îi corespunde ca reciproc punctul D. Cu (dr Δ_1, Δ'; D, B') găsim axa neutră Δ_E.

Avem:

$$A = \frac{10 + 6{,}50}{2} \cdot 4{,}00 = 33 \text{ m}^2,$$

$$S_{\Delta_E} = 2{,}25 \cdot 33 = 74{,}20 \text{ m}^3.$$

Efortul unitar maxim de compresiune are loc în D, iar de întindere în L. Avem:

$$\sigma_D = \frac{700}{74{,}20} \cdot 7{,}40 = 6{,}98 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_L = -\frac{700}{74{,}20} \cdot 1{,}50 = -1{,}42 \text{ kg/cm}^2.$$

— In cazul cînd se consideră numai secțiunea activă, considerăm secțiunea comprimată $DR_1R_1'K$ acționată în E de aceeași forță N (fig. 6.9). Din tabele avem: $\alpha = 0{,}55$, $\eta_0 = 0{,}452$; $\eta_1 = 0{,}631$, $\eta_3 = 0{,}406$ etc. Se găsește axa neutră R_2R_2'.

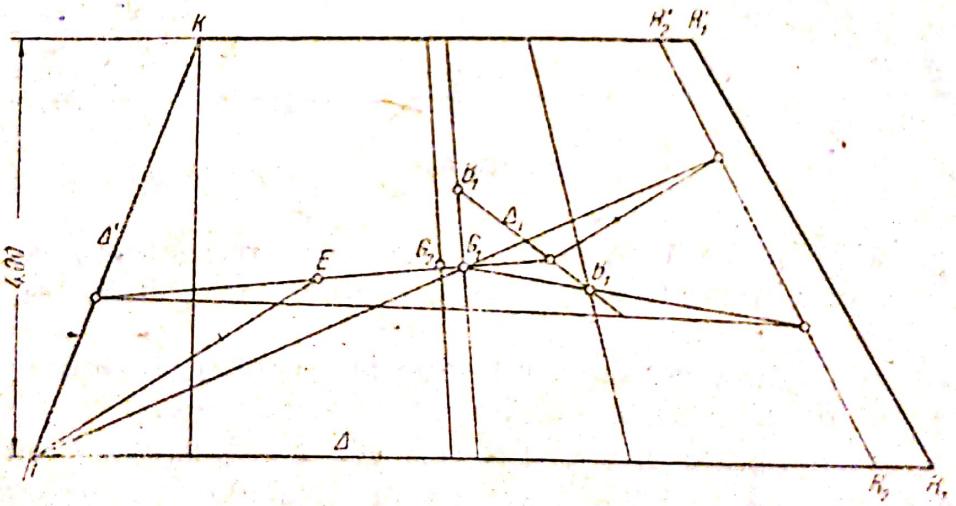

Fig. 6.9

Dacă acum considerăm numai secțiunea comprimată $DR_2R_2'K$ cu forța N aplicată în E, se găsește o axă neutră foarte apropiată de R_2R_2'. Deci putem considera cu suficientă exactitate, secțiunea activă $DR_2R_2'K$, avînd axa neutră R_2R_2'.

Pentru această secțiune avem:

$$A = \frac{8,05+4,40}{2} \cdot 4 = 24,90 \text{ m}^2;$$

$$S_{\Delta' E} = 2,81 \cdot 23 = 64,50 \text{ m}^3.$$

Efortul unitar maxim are loc în D

$$\sigma_D = \frac{700}{64,50} \cdot 7,07 = 7,70 \text{ kg/cm}^2.$$

Metoda aceasta este generală, putînd fi aplicată oricărei secțiuni omogene, cînd lucrează numai secțiunea activă.

Aplicația 9. O culee oblică a unui pod are la un rost secțiunea în formă de paralelogram, cu dimensiunile din fig. 6.10 a, acționată în punctul E (1,45; 1) de forța $N = 400$ t. Să se determine:

a) Eforturile unitare maxime de compresiune și de întindere.

b) Efortul unitar maxim de compresiune, considerînd că lucrează cu secțiunea activă. Se va rezolva problema prin metoda transformărilor.

Avem $a = 7$ m, $b = 5$ m, $\cos\theta = 0,6$ și, folosind formulele (3.56), obținem:

$$a_1 = \sqrt{7^2 + 7 \cdot 5 \cdot 0,6} = 8,40,$$

$$b_1 = \sqrt{7^2 + 7 \cdot 5 \cdot 0,6} = 6,80.$$

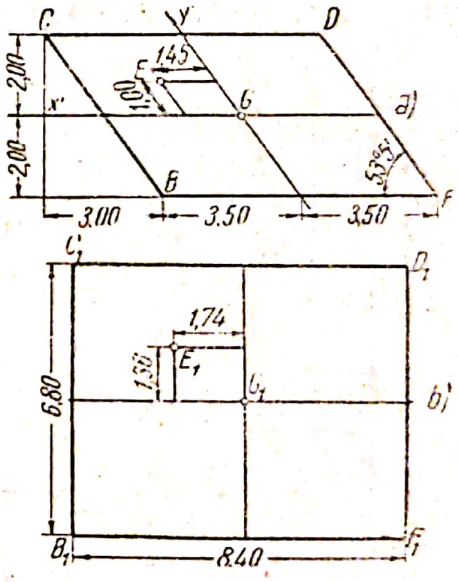

Fig. 6.10

Aria paralelogramului este $A = 7 \cdot 4 = 28$ m^2.

Coordonatele punctului $E_1(u_1, v_1)$ de aplicare a forței pentru secțiunea dreptunghiulară le determinăm cu formulele (3.57):

$$u_1 = u\frac{a_1}{a} = 1,45 \cdot \frac{8,40}{7} = 1,74; \quad v_1 = v\frac{b_1}{b} = 1 \cdot \frac{6,80}{5} = 1,36.$$

Eforturile unitare maxime de compresiune și întindere le găsim cu formula (3.59), care dă:

$$\sigma_{max} = \frac{400}{28}\left(1 \pm \frac{6 \cdot 1,74}{8,40} \pm \frac{6 \cdot 1,36}{6,80}\right),$$

de unde obținem:

$$\sigma_{1max} = 4{,}91 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresiune)},$$
$$\sigma_{2max} = -1{,}78 \text{ kg/cm}^2 \text{ (întindere)}.$$

— Cazul secțiunii active: din „Manualul pentru beton armat", Editura Tehnică (Editura AGIR), 1949, pag. 103, cu valorile:

$$\frac{1{,}74}{8{,}40} = 0{,}208\,; \quad \frac{1{,}36}{6{,}80} = 0{,}200$$

găsim $\mu = 4{,}25$.

Aplicînd formula (3.60), obținem:

$$\sigma_{max} = 4{,}25 \frac{400}{28} \text{ t/m}^2 = 6{,}05 \text{ kg/cm}^2.$$

Aplicația 10. În cazul culeei oblice din problema precedentă, fig. 6.11, se cere să se determine eforturile unitare

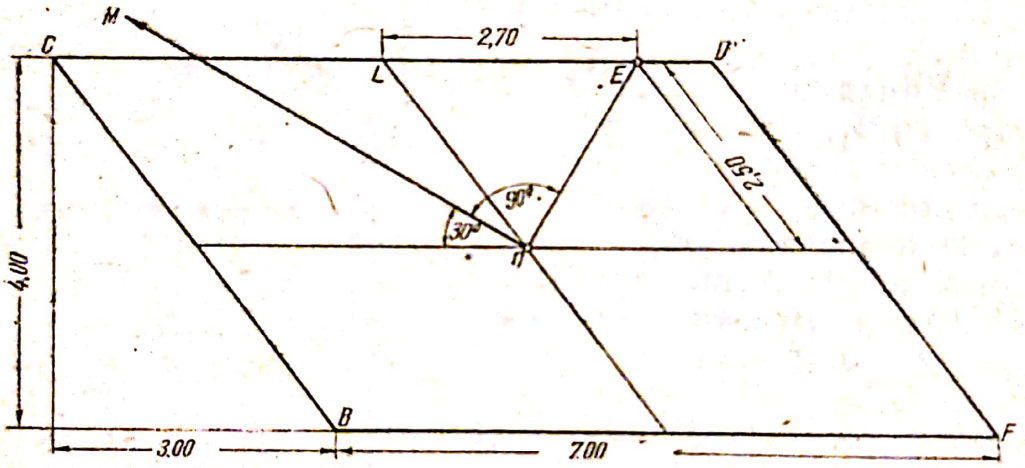

Fig. 6.11

maxime de compresiune și întindere, în ipoteza că secțiunea este solicitată de un moment oblic $M = 500$ tm, avînd direcția din figură.

Pe direcția normală la vectorul moment considerăm în E forța N dată de

$$N = \frac{M}{OE} = \frac{500}{2{,}30} = 217 \text{ t}.$$

Vom calcula laturile dreptunghiului ca în aplicația 8, obținînd $a_1 = 8{,}40$, $b_1 = 6{,}80$, apoi coordonatele punctului E_1

$$u_1 = 2{,}70 \frac{8{,}40}{7} = 3{,}24\,; \quad v_1 = 2{,}50 \frac{6{,}80}{5} = 3{,}40.$$

Eforturile unitare în orice punct al secțiunii date se obțin scăzînd din eforturile unitare datorită sarcinii N aplicată în E, efortul $\frac{N}{A}$. Avem:

$$\sigma_{max}=\frac{N}{A}\left(\pm\frac{6u_1}{a_1}\pm\frac{6v_1}{b_1}\right)=\frac{217}{28}\left(\pm\frac{6\cdot3{,}24}{8{,}40}\pm\frac{6\cdot3{,}40}{6{,}80}\right).$$

De unde

$$\sigma_{1\,max}=4{,}12\ \text{kg/cm}^2\ \text{(compresiune)},$$
$$\sigma_{2\,max}=-4{,}12\ \text{kg/cm}^2\ \text{(întindere)}.$$

Observație. Se poate proceda și astfel: dacă m este direcția vectorului moment M din secțiunea dată și n direcția normală la aceasta, se află direcția n_1 corespunzătoare în secțiunea dreptunghiulară.

Se ia un vector $\overline{v}$ pe direcția n și se află valoarea sa $\overline{v}_1$ corespunzătoare pe direcția n_1.

Pentru calculul eforturilor unitare în secțiunea dată, se înmulțesc cu $\frac{A_1}{A}$ eforturile unitare rezultate în secțiunea dreptunghiulară solicitată de momentul $M_1=M\left|\frac{\overline{v}_1}{\overline{v}}\right|$ după o direcție normală la n_1.

Aplicația 11. O zidărie masivă are secțiunea în formă de elipsă, cu axele $a=6$ m, $b=3$ m, și este acționată în punctul E (1,60; 1,80) (fig. 6.12) de o forță de compresiune $N=600$ t.

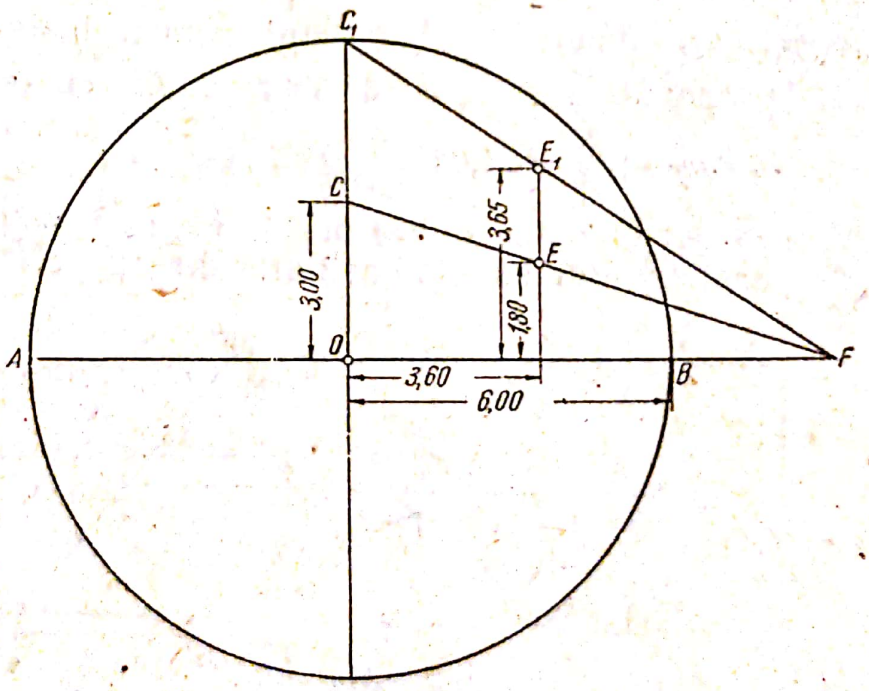

Fig. 6.12

Se cer eforturile maxime de compresiune și întindere; în cazul cînd se consideră că lucrează secțiunea activă, să se determine efortul unitar maxim.

Elipsa este proiecția unui cerc de rază $r=a=6$ m, iar unghiul α dintre planul cercului și al elipsei este dat de $\cos\alpha=\frac{b}{a}=0{,}5$.

Punctul E_1 din planul cercului, corespunzător punctului E din planul elipsei, se găsește la intersecția dreptei FC_1 cu verticala dusă prin E. Cînd o secțiune circulară de rază r și arie A_1, este solicitată de o forță N într-un punct situat la distanța e_1 de centru, eforturile unitare maxime și minime sînt date de relația:

$$\sigma=\frac{N}{A_1}\left(1\pm\frac{4e_1}{r}\right).$$

In cazul problemei avem $e_1=\overline{OE}_1=5{,}10$ m, $A=\pi ab=\pi\cdot3\cdot6=56{,}50\ m^2$, și deci avem eforturile maxime și minime pentru secțiunea eliptică:

$$\sigma_{max}=\frac{N}{A}\left(1\pm\frac{4e_1}{r}\right)=\frac{600}{56{,}50}\left(1\pm\frac{4\cdot5{,}10}{6{,}00}\right)t/m^2;$$

$\sigma_{1\,max}=4{,}70$ kg/cm^2 (compresiune),
$\sigma_{2\,min}=-2{,}55$ kg/cm^2 (întindere).

— Să considerăm că lucrează numai secțiunea activă.

In acest caz, tabela din „Manualul pentru beton armat" pag. 104, la raportul $\frac{e_1}{r}=\frac{5{,}10}{6{,}00}=0{,}85$ dă $\mu=21{,}08$, cu care:

$$\sigma_{max}=\mu\frac{N}{A}=21{,}08\,\frac{600}{56{,}50}=22{,}4\ kg/cm^2.$$

Aplicația 12. O culee oblică are la un rost secțiunea în formă de paralelogram cu dimensiunile din fig. 6.13 și este

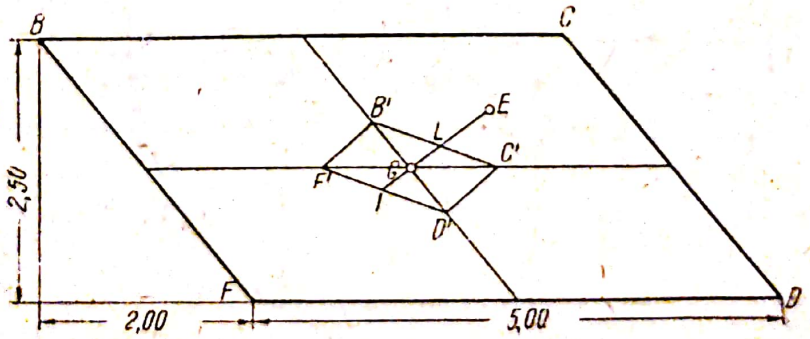

Fig. 6.13

acționată în punctul E de o forță de compresiune $N=200$ t. Se cer eforturile unitare în cele patru vîrfuri ale secțiunii prin metoda sîmburelui central.

Fie σ_B, σ_C, σ_D, σ_F eforturile unitare în cele patru vîrfuri. Avem:

$$A=5\cdot 2{,}50=12{,}50\ \text{m}^2,$$

$$\sigma_F=-\frac{N}{A}\cdot\frac{\overline{LE}}{\overline{LG}}=-\frac{200}{12{,}50}\cdot\frac{0{,}58}{0{,}33}=-2{,}82\ \text{kg/cm}^2\ \text{(întindere)},$$

$$\sigma_C=\frac{N}{A}\cdot\frac{\overline{IE}}{\overline{IG}}=\frac{200}{12{,}50}\cdot\frac{1{,}72}{0{,}33}=8{,}32\ \text{kg/cm}^2\ \text{(compresiune)}.$$

Intrucît dreapta GE intersectează dreptele $B'F'$, $C'D'$ în afara cadrului figurii, aflăm eforturile în B și D cu formula (3.66). Pentru punctul B avem:

$S_{C'D'}=12{,}50\cdot 0{,}55=6{,}90\ \text{m}^3$, iar distanța de la E la $C'D'$, $s=0{,}45$ m.

Rezultă:

$$\sigma_B=\frac{200}{6{,}90}\cdot 0{,}45=1{,}30\ \text{kg/cm}^2\ \text{(compresiune)}.$$

Pentru punctul D,

$$s=0{,}60\ \text{m}$$

și:

$$\sigma_D=-\frac{200}{6{,}90}\cdot 0{,}60=-1{,}74\ \text{kg/cm}^2\ \text{(întindere)}$$

Aplicația 13. Secțiunea în formă de trapez a unei culee oblice are dimensiunile din fig. 6.14 și este acționată în E de o forță $N=400$ t. Se cer eforturile unitare în punctele B și D prin metoda sîmburelui central.

Cu ajutorul tabelelor determinăm centrul de greutate și sîmburele central. In tabela din cap II. § 4, intrăm cu $\alpha=\frac{3}{6}=0{,}50$ și avem:

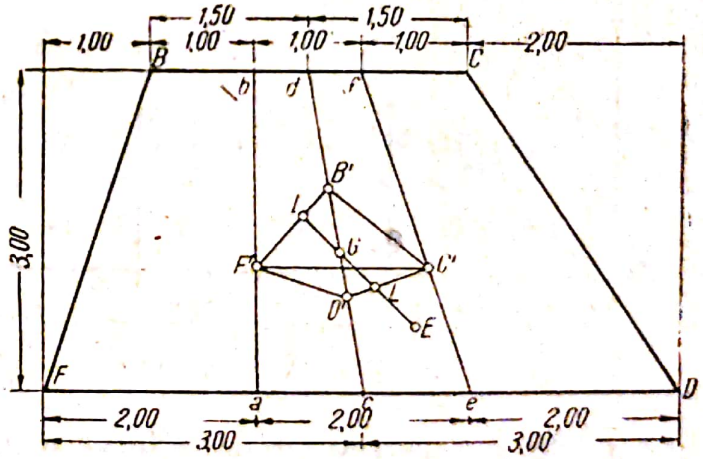

Fig. 6.14

$$\eta_0=0{,}444,\quad \eta_1=0{,}625,\quad \eta_2=0{,}300,\quad \eta_3=0{,}393,$$

rezultă:

$$\overline{cG}=\eta_0\overline{cd}=0{,}444\cdot 3{,}05=1{,}34,\quad \overline{cB'}=\eta_1\overline{cd}=0{,}625\cdot 3{,}05=1{,}91,$$

$$\overline{cD'}=\eta_2\overline{cd}=0{,}300\cdot 3{,}05=0{,}90,\quad \overline{aF'}=\eta_3\overline{ab}=0{,}393\cdot 3=1{,}18.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem:

$$A = \frac{6+3}{2} \cdot 3 = 13{,}50 \text{ m}^2.$$

Şi, cu acestea:

$$\sigma_B = \frac{N}{A} \cdot \frac{\overline{LE}}{\overline{LG}} = -\frac{400}{13{,}50} \cdot \frac{0{,}52}{0{,}45} = -3{,}42 \text{ kg/cm}^2 \text{ (întindere)}$$

$$\sigma_D = \frac{N}{A} \cdot \frac{\overline{IE}}{\overline{IG}} = \frac{4{,}00}{13{,}50} \cdot \frac{1{,}46}{0{,}46} = 9{,}40 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresiune).}$$

Aplicaţia 14. La un pod de beton armat de cale ferată, o grindă are secţiunea din fig. 6.15, unde armătura formată din fiare ∅ 20 mm este simetric aşezată faţă de axa longitudinală.

Dacă această secţiune este acţionată într-un punct E situat pe axa longitudinală, de o forţă de compresiune $N = 160$ t, se

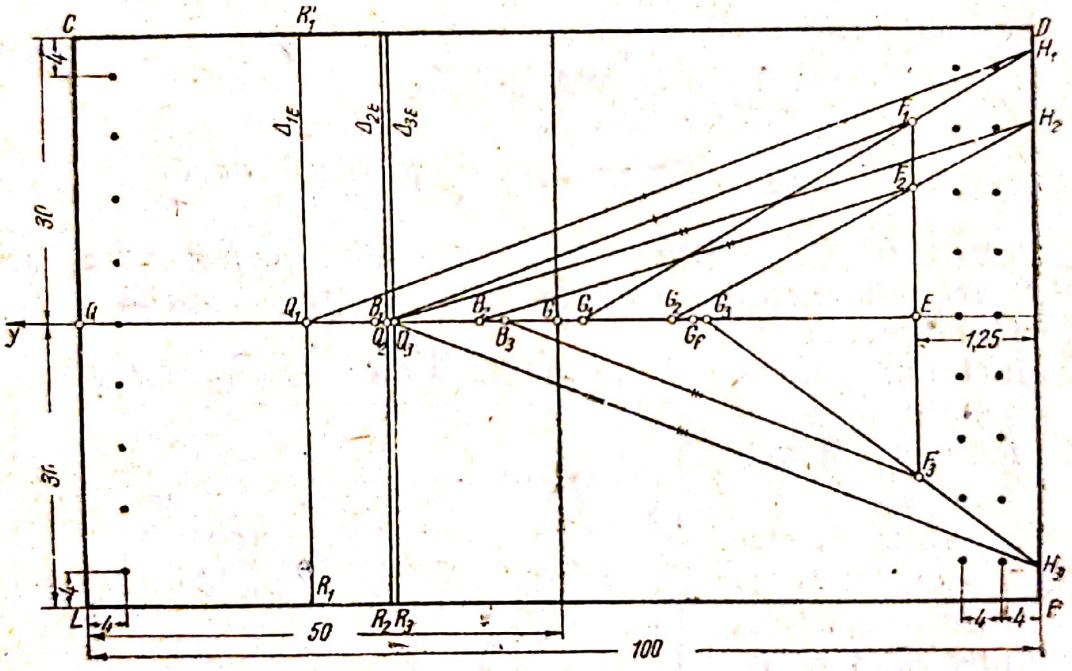

Fig. 6.15

cere să se determine prin metoda a doua eforturile unitare maxime în beton şi armătură.

a) In prima fază determinăm axa neutră a întregii secţiuni $A_b + A_f$ pentru care procedăm astfel:

Aflăm punctul reciproc B_1 al dreptei DF în raport cu $A_b + A_f$.

$A_{1b} = 100 \cdot 60 = 6\,000 \text{ cm}^2$, $A_f = 27\omega = 1\,270 \text{ cm}^2$ (ω = secţiunea unei vergele echivalată în secţiune de beton).

In raport cu dreapta DF avem:

$$S_{1b}=6\,000\cdot 50=3\cdot 10^5\ \text{cm}^3,$$

$$S_f=18\cdot 6\omega+9\cdot 96\omega=972\omega=0{,}457\cdot 10^5\ \text{cm}^3,$$

$$I_f=9\cdot 96^2\omega+9\cdot 8^2\omega+9\cdot 4^2\omega=83\,644\omega\ \text{cm}^4.$$

Reciprocul dreptei DF în raport cu A_f este pe axa y la distanța δ_f de DF

$$\delta_f=\frac{I_f}{S_f}=\frac{83\,644}{972}=86{,}1\ \text{cm}.$$

Reciprocul B_1 al dreptei DF în raport cu A_b+A_f este la distanța δ_1 de DF:

$$\delta_1=\frac{\frac{2}{3}\,100\,S_{1b}+86{,}1\,S_f}{S_{1b}+S_f}=\frac{66{,}6\cdot 3+86{,}1\cdot 0{,}457}{3{,}457}=69{,}2\ \text{cm}.$$

Centrul de greutate G_1 al secțiunii de beton și armătură este dat de:

$$\overline{G_1G}=\frac{15\cdot 42\cdot 9\cdot 3{,}14}{6\,000+1\,270}\approx 2{,}5\ \text{cm}$$

(la numărător fiind momentul static al lui A_f față de G).

Axa neutră o determinăm aplicînd construcția din fig. 3.2 astfel: ducem prin G_1 dreapta G_1H_1 arbitrară și $EF_1 \parallel DF$. Paralela dusă prin H_1 la F_1B_1 intersectează axa y în Q_1 prin care trece axa neutră Δ_{1E}.

b) In faza a doua determinăm axa neutră considerînd forța aplicată în E iar secțiunea $R_1R_1'DF+A_f=A_{2b}+A_f$. Centrul de greutate G_2 al acestei secțiuni este dat de distanța:

$$\overline{G_1G_2}=\frac{R_1R_1'CL\left(\overline{QG_1}-\frac{\overline{LR_1}}{2}\right)}{A_{2b}+A_f}=\frac{23{,}5\cdot 60(52{,}5-11{,}75)}{76{,}5\cdot 60+1\,270}=9{,}7\ \text{cm},$$

iar:

$$S_{2b}=60\cdot\frac{76{,}5^2}{2}=1{,}755\cdot 10^5\ \text{cm}^3.$$

Distanța δ_2 de la dreapta DF a reciprocului B_2 în raport cu $A_{2b}+A_f$ este:

$$\delta_2=\frac{\frac{2}{3}\,76{,}5\cdot 1{,}755+86{,}1\cdot 0{,}457}{1{,}755+0{,}457}=58{,}4\ \text{cm}.$$

Printr-o construcție asemănătoare găsim axa neutră Δ_{2E}.

c) La fel determinăm axa neutră pentru $R_2R_2'DF+A_f=$ $=A_{3b}+A_f$.

Centrul de greutate G_3 al secțiunii $A_{3b}+A_f$ este dat de distanța:

$$\overline{G_1G_3}=\frac{R_2R_2'CL\left(\overline{QG_1}-\frac{\overline{LR_2}}{2}\right)}{A_{3b}+A_f}=\frac{32\cdot60\,(52{,}5-16)}{68\cdot60+1\,270}=13{,}10\text{ cm},$$

iar

$$S_{3b}=60\cdot\frac{68^2}{2}=1{,}39\cdot10^5\text{ cm}^3,$$

$$\delta_3=\frac{\frac{2}{3}\,68\cdot1{,}39+86{,}1\cdot0{,}457}{1{,}39+0{,}457}=55{,}6\text{ cm}.$$

Găsim apoi axa neutră Δ_{3E} pe care o putem considera axă neutră reală.

Poziția centrului de greutate G_f al armăturii este dată de distanța:

$$\overline{G_fG}=\frac{42\cdot9\omega}{27\omega}=14\text{ cm}.$$

Momentul static al secțiunii active de beton și al armăturii în raport cu Δ_{3E} este:

$$S=60\cdot\frac{67{,}2^2}{2}+1\,270\,\overline{Q_3G_f}=1{,}75\cdot10^5\text{ cm}^3.$$

Efortul unitar maxim de compresiune în beton este:

$$\sigma=\frac{N}{S}\,s=\frac{160\,000}{1{,}75\cdot10^5}\cdot67{,}2=61{,}5\text{ kg/cm}^2.$$

Eforturile unitare maxime de compresiune și întindere în armătură sînt:

$$\sigma_f'=\frac{15\cdot160\,000}{1{,}75\cdot10^5}\cdot63{,}3=870\text{ kg/cm}^2\text{ (compresiune)},$$

$$\sigma_f''=\frac{15\cdot160\,000}{1{,}75\cdot10^5}\,28{,}7=394\text{ kg/cm}^2\text{ (întindere)}.$$

Observație. Cu destul de bună aproximație ne puteam opri la axa neutră Δ_{2E}, deoarece Δ_{3E} este foarte aproape de aceasta.

Aplicația 15. O grindă de beton armat la un pod are secțiunea din fig. 6.16 și este armată cu 12 fiare cu ∅ 20 mm. Grinda fiind solicitată în punctul E de o forță de compre-

Scanned with OKEN Scanner

siune $N=25$ t, se cere să se determine prin metoda întîi, eforturile unitare maxime în beton și armătură.

Fie ω cm^2, secțiunea unei vergele de armătură, echivalată în secțiune de beton. Considerînd axele xOy, avem:

$$A_f=12\,\omega \text{ cm}^2,$$
$$S_{xf}=5\,(1+2+3+4)\,\omega+2\cdot 32\,\omega=114\,\omega \text{ cm}^3,$$
$$S_{yf}=5\,(1+2+3+4)\,\omega+2\cdot 62\,\omega=174\,\omega \text{ cm}^3.$$

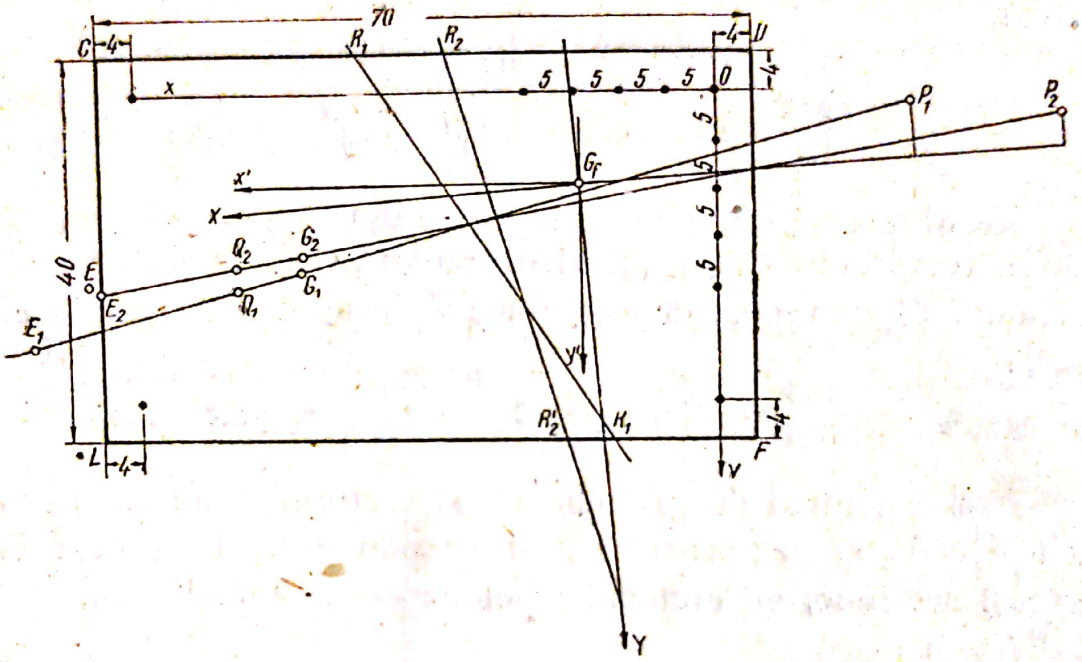

Fig. 6.16

Centrul de greutate G_f (x_0, y_0) este dat prin coordonatele:

$$x_0=\frac{174}{12}=14{,}5 \text{ cm}; \qquad y_0=\frac{114}{12}=9{,}5 \text{ cm}.$$

Momentele de inerție sînt:

$$I_{xf}=5^2(1^2+2^2+3^2+4^2)\,\omega+2\cdot 32^2\omega=2\,798\omega \text{ cm}^4,$$
$$I_{yf}=5^2(1^2+2^2+3^2+4^2)\,\omega+2\cdot 64^2\omega=8\,438\omega \text{ cm}^4,$$
$$I_{xyf}=62\cdot 32\omega=1\,984\omega \text{ cm}^4.$$

În raport cu axele $x'y'$ paralele cu xy, duse prin G_f, avem momentele de inerție:

$$I_{x'f}=2\,798\omega-12\cdot 9{,}5^2\omega=1\,714\omega \text{ cm}^4,$$
$$I_{y'f}=8\,438\omega-12\cdot 14{,}5^2\omega=5\,918\omega \text{ cm}^4,$$
$$I_{x'y'f}=1\,984\omega-12\cdot 9{,}5\cdot 14{,}5\omega=334\omega \text{ cm}^4.$$

Direcțiile principale centrale X, Y și momentele de inerție principale sînt date de:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 334}{5\,918 - 1\,714} = 0{,}159, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0{,}08,$$

$$I_{Xf,\,Yf} = \left[\frac{7\,632}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4\,204}{2}\right)^2 + 334^2}\right]\omega.$$

Deci:

$$I_{Xf} = 1\,688\omega \text{ cm}^4, \quad I_{Yf} = 5\,944\omega \text{ cm}^4,$$

$$r^2_{Xf} = \frac{1\,688}{12} = 140{,}5 \text{ cm}^2; \quad r^2_{Yf} = \frac{5\,944}{12} = 495 \text{ cm}^2.$$

Rezolvăm problema prin încercări. Luăm axa neutră R_1R_1'; reciprocul P_1 (α_1, β_1) al dreptei R_1R_1' (sistemul de referință XY) în raport cu secțiunea A_f este dat de formulele (4.3):

$$\alpha_1 = -\frac{495}{13{,}7} = -36 \text{ cm}; \quad \beta_1 = -\frac{140{,}5}{24{,}5} = -5{,}8 \text{ cm}.$$

Aflăm centrul de greutate G_1 al secțiunii active de beton $LCR_1R_1' = A_{1b}$ și reciprocul Q_1 al dreptei R_1R_1' în raport cu aceeași secțiune, cu ajutorul tabelelor de la cap. II. § 4.

Avem:

$$A_{1b} = \frac{27{,}7 + 55}{2} \cdot 40 = 1\,654 \text{ cm}^2,$$

$$S_{1b} = 1\,654 \cdot 17{,}5 = 28\,900 \text{ cm}^3,$$

$$S_{1f} = 12 \cdot 12\omega = 6\,780 \text{ cm}^3.$$

Considerăm în Q_1 și P_1 mărimi egale respectiv cu S_{1b} și $-S_{1f}$ și determinăm punctul E_1 de aplicare al rezultantei acestora. El este pe dreapta P_1Q_1, dat de distanța:

$$\overline{Q_1E_1} = -\frac{\overline{P_1Q_1} \cdot S_{1f}}{S_{1b} - S_{1f}} = -\frac{74{,}5 \cdot 6\,780}{28\,900 - 6\,780} = -22{,}8 \text{ cm}.$$

Cum E_1 nu este suficient de aproape de E, încercăm ca axă neutră R_2R_2'.

Pentru P_2, reciprocul dreptei R_2R_2' în raport cu A_f, avem coordonatele:

$$\alpha_2 = -\frac{495}{9{,}5} = -52 \text{ cm}; \quad \beta_2 = -\frac{140{,}5}{44} = -3{,}2 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Asemănător aflăm punctele G_2, Q_2 referitoare la secțiunea $LCR_2R_2'=A_{2b}$, cu ajutorul tabelelor indicate. Mai calculăm:

$$A_{2b}=1\,750\ \text{cm}^2,$$

$$S_{2b}=1\,750\cdot 21=36\,800\ \text{cm}^3,$$

$$S_{2f}=12\cdot 9{,}3\omega=5\,250\ \omega\ \text{cm}^3.$$

Considerăm, de asemenea, în Q_2 și P_2 mărimi egale respectiv cu S_{2b} și $-S_{2f}$ și găsim punctul E_2 de aplicare al rezultantei acestora. Avem:

$$\overline{Q_2E_2}=-\frac{\overline{P_2Q_2}\cdot S_{2f}}{S_{1b}-S_{1f}}=-\frac{89{,}5\cdot 5\,250}{36\,800-5\,250}=-15\ \text{cm}.$$

Se observă că punctul E_2 este destul de aproape de punctul E, astfel că putem considera dreapta R_2R_2' ca adevărata axă neutră. (In caz că E_2 nu era aproape de E, continuam încercările).

Efortul unitar maxim în beton este:

$$\sigma_L=\frac{N}{S_{2b}-S_{2f}}s=\frac{35\,000}{31\,550}\cdot 47{,}5=52{,}50\ \text{kg/cm}^2.$$

In armături:

$$\sigma'=\frac{nN}{S_{2b}-S_{2f}}s'=\frac{15\cdot 35\,000}{31\,550}\cdot 42{,}5=704\ \text{kg/cm}^2\ \text{(compresiune)},$$

$$\sigma''=\frac{nN}{S_{2b}-S_{2f}}s''=\frac{15\cdot 35\,000}{31\,550}\cdot 26=432\ \text{kg/cm}^2\ \text{(întindere)}.$$

Observație. In caz că punctele P_i nu cad în cadrul figurii, se vor aplica formulele (4.11), respectiv (4.14).

Aplicația 16. O grindă de beton armat, la un pod, are secțiunea din fig. 6.17 și este solicitată de un moment $M=20$ tm, al cărui vector face un unghi de 75° cu axa longitudinală a secțiunii, iar armătura este de ∅ 20 mm. Să se determine cu metoda întîi, eforturile unitare maxime în beton și armătură.

Avem:

$$A_f=16\omega\ \text{cm}^2,$$

$$S_{xf}=6(1+2+3+4+5+6+7)\omega+42\omega=210\omega\ \text{cm}^3,$$

$$S_{yf}=6(1+2+3+4+5+6)\omega+2\cdot 72\omega=270\omega\ \text{cm}^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Centrul de greutate G_f (x_0, y_0) are coordonatele:

$$x_0 = \frac{270}{16} = 16{,}8 \text{ cm}; \qquad y_0 = \frac{210}{16} = 13{,}2 \text{ cm},$$

$$I_{xf} = 6^2(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2)\omega + 42^2\omega = 6\,804\omega \text{ cm}^4,$$

$$I_{yf} = 6^2(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)\omega + 2\cdot 72^2\omega = 13\,644\omega \text{ cm}^4,$$

$$I_{xyf} = 42\cdot 72\omega = 3\,024\omega \text{ cm}^4.$$

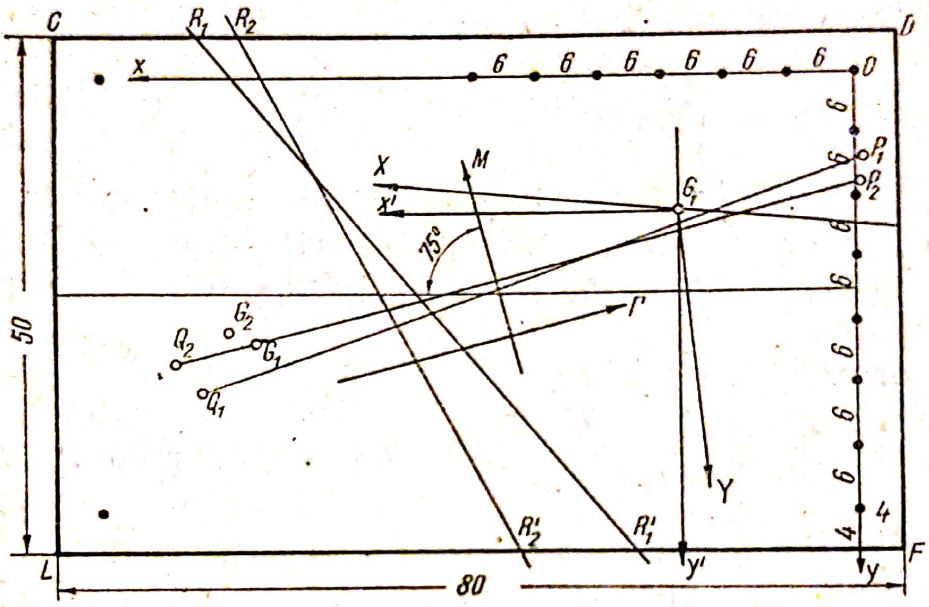

Fig. 6.17

Momentele de inerție în raport cu axele $x'G_fy'$ paralele cu xOy:

$$I_{x'f} = 6\,804\omega - 16\cdot 13{,}2^2\omega = 4\,014\omega \text{ cm}^4,$$

$$I_{y'f} = 13\,644\omega - 16\cdot 16{,}8^2\omega = 9\,144\omega \text{ cm}^4,$$

$$I_{x'y'f} = 3\,024\omega - 16\cdot 13{,}2\cdot 16{,}8\omega = -516\omega \text{ cm}^4.$$

Direcțiile principale și momentele de inerție principale:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\cdot 516}{9\,144-4\,014} = -0{,}206, \quad \operatorname{tg}\alpha = -0{,}102,$$

$$I_{Xf,\,Yf} = \left[\frac{13\,158}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5\,130}{2}\right)^2 + 516^2}\right]\omega,$$

dau:

$$I_{Xf}=3\,963\omega \text{ cm}^4; \quad I_{Yf}=9\,195\omega \text{ cm}^4;$$

$$r^2_{Xf}=\frac{3\,963}{16}=248 \text{ cm}^2; \quad r^2_{Yf}=\frac{9\,195}{16}=575 \text{ cm}^2.$$

Punctul de aplicare al forței este la infinit pe o direcție determinată de dreapta Γ, perpendiculară pe direcția vectorului moment M.

Încercăm ca axă neutră $R_1R'_1$.

Secțiunea activă de beton $LCR_1R'_1=A_{1b}=1\,700$ cm^2.

Determinăm centrul de greutate G_1 al secțiunii A_{1b} și punctele P_1, Q_1, reciprocele dreptei $R_1R'_1$ respectiv în raport cu A_f și A_{1b}. Pentru G_1 și Q_1 se folosesc tabelele de la cap. II. § 4. Pentru P_1 (α_1, β_1) avem:

$$\alpha_1=-\frac{575}{34,5}=-16,7 \text{ cm}; \quad \beta_1=-\frac{248}{38}=-6,6 \text{ cm}.$$

Deci:

$$S_{1b}=1\,700\cdot 14,7=25\,000 \text{ cm}^3; \quad S_{1f}=16\cdot 24\omega=18\,150 \text{ cm}^3.$$

Avem:

$$\varepsilon_1=S_{1b}-S_{1f}=6\,850 \text{ cm}^3,$$

și se vede că ε_1 este prea mare, deci $R_1R'_1$ nu convine. Se vede de asemenea că nici P_1Q_1 nu este paralelă cu direcția dreptei Γ. Încercăm cu dreapta $R_2R'_2$.

Determinăm punctele G_2, P_2 (α_2, β_2), Q_2:

$$\alpha_2=-\frac{575}{34,5}=-16,7 \text{ cm}; \quad \beta_2=-\frac{248}{61}=-4,1 \text{ cm};$$

$$A_{2b}=1\,540 \text{ cm}^2;$$

$$S_{2b}=1\,540\cdot 14,2=21\,900 \text{ cm}^3; \quad S_{2f}=16\cdot 29\omega=21\,820 \text{ cm}^3.$$

Se constată că

$$\varepsilon_2=S_{2b}-S_{2f}=80, \text{ care este destul de mic.}$$

A doua condiție ca dreapta P_2Q_2 să fie paralelă cu dreapta Γ este și ea îndeplinită, deci putem considera pe $R_2R'_2$ ca axă neutră reală. Vom considera $S_{2b}\approx S_{2f}\approx 21\,850$ cm^3.

Scanned with OKEN Scanner

Efortul unitar maxim în beton este:

$$\sigma_L = \frac{M}{S_{2b}\,\overline{P_2Q_2}}\,s = \frac{2\,000\,000}{21\,850 \cdot 67} \cdot 39 = 53{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Eforturile unitare în armătură:

$$\sigma' = \frac{nM}{S_{2b}\,\overline{P_2Q_2}}\,s' = \frac{15 \cdot 2 \cdot 10^6}{21\,850 \cdot 67} \cdot 33{,}2 = 680 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresiune)},$$

$$\sigma'' = \frac{nM}{S_{2b}\,\overline{P_2Q_2}}\,s'' = \frac{15 \cdot 2 \cdot 10^6}{21\,850 \cdot 67} \cdot 49{,}6 = 1\,050 \text{ kg/cm}^2 \text{ (întindere)}.$$

Aplicația 17. Secțiunea unui cadru de beton armat la un pod are dimensiunile din fig. 6.18 și armătura de ∅ 20 mm

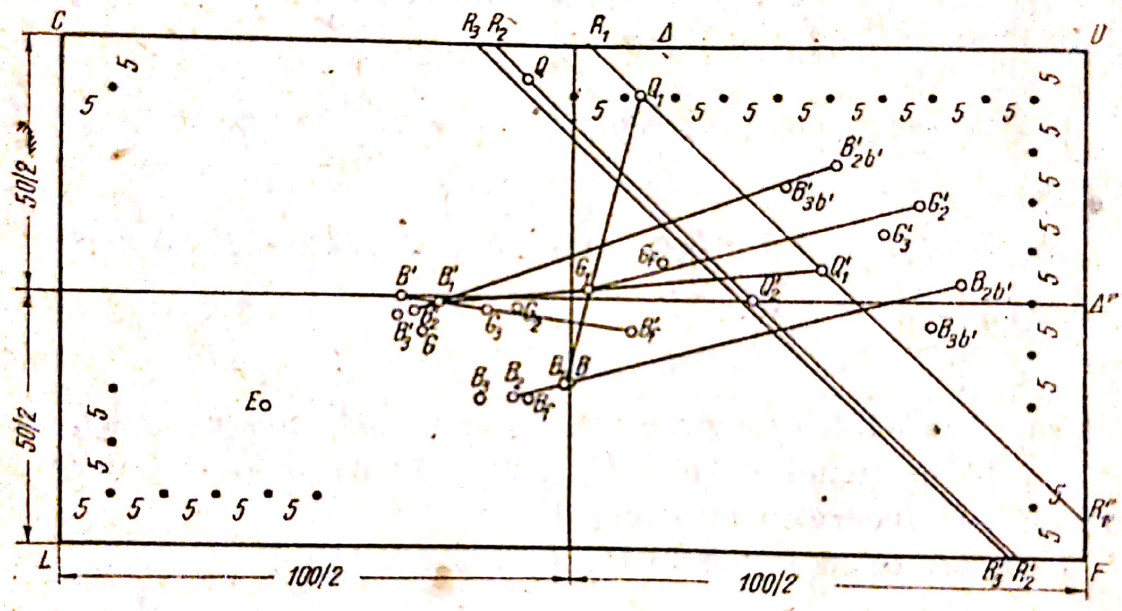

Fig. 6.18

și este acționată în punctul E de o forță normală de compresiune $N = 80$ t. Să se determine cu metoda a doua eforturile unitare maxime în beton și armătură.

Considerăm ca axe Δ, Δ', respectiv CD și DF.

a) Vom căuta axa neutră corespunzătoare punctului E, cînd lucrează întreaga secțiune de beton și secțiunea armăturii. Avem:

$$A_{1b} = 50 \cdot 100 = 5\,000 \text{ cm}^2; \quad A_f = 25\omega = 1\,180 \text{ cm}^2;$$

$$A_{1b} + A_f = 0{,}618 \cdot 10^4 \text{ cm}^2,$$

$$S_{\Delta b_1} = 100\frac{50^2}{2} = 1{,}25 \cdot 10^5 \text{ cm}^3; \quad S_{\Delta' b_1} = 50\frac{100^2}{2} = 2{,}5 \cdot 10^5 \text{ cm}^3,$$

$$S_{\Delta f} = [11 \cdot 5 + 6(12{,}5 + 10) + 6 \cdot 45 + 2 \cdot 37{,}5]\,\omega = 535\omega =$$

$$= 0{,}252 \cdot 10^5 \text{ cm}^3,$$

$$S_{\Delta' f} = [8 \cdot 5 + 4 \cdot 95 + 9 \cdot 30 + 4(100 - 17{,}5)]\,\omega = 1\,020\omega =$$

$$= 0{,}481 \cdot 10^5 \text{ cm}^3,$$

$$I_{\Delta f} = [11 \cdot 5^2 + 6 \cdot 45^2 + 5^2(2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) +$$

$$+ 35^2 + 40^2]\,\omega = 18\,725\omega = 0{,}882 \cdot 10^6 \text{ cm}^4,$$

$$I_{\Delta' f} = [8 \cdot 5^2 + 4 \cdot 45^2 + 5^2(2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 10^2) + 75^2 + 80^2 +$$

$$+ 85^2 + 90^2]\,\omega = 45\,250\omega = 2{,}132 \cdot 10^6 \text{ cm}^4,$$

$$I_{\Delta\Delta' f} = [10 \cdot 27{,}5 \cdot 5 + 6 \cdot 22{,}5 \cdot 5 + 5 \cdot 85 \cdot 45 + 2 \cdot 95 \cdot 37{,}5 +$$

$$+ 45 \cdot 5 + 95 \cdot 5]\,\omega = 29\,000\omega = 1{,}37 \cdot 10^6 \text{ cm}^4.$$

Centrul de greutate G_1 (ξ_1, η_1) al secțiunii $A_{1b} + A_f$ este dat de coordonatele:

$$\xi_1 = \frac{S_{\Delta' b_1} + S_{\Delta' f}}{A_{1b} + A_f} = \frac{2{,}98 \cdot 10}{0{,}618} = 48{,}2 \text{ cm},$$

$$\eta_1 = \frac{S_{\Delta b_1} + S_{\Delta f}}{A_{1b} + A_f} = \frac{1{,}50 \cdot 10}{0{,}618} = 24{,}3 \text{ cm}.$$

Centrul de greutate G_f al secțiunii armăturii are coordonatele:

$$\xi_0 = \frac{1\,020}{25} = 40{,}8 \text{ cm}; \quad \eta_0 = \frac{535}{25} = 21{,}4 \text{ cm}.$$

Punctele reciproce B_f, B'_f, B_1, B'_1 ale dreptelor Δ și Δ' în raport cu secțiunile A_f, $A_{1b} + A_f$ sînt:

$$B_f: \begin{cases} x_f = \dfrac{I_{\Delta\Delta' f}}{S_{\Delta f}} = \dfrac{1{,}37 \cdot 10}{0{,}252} = 54{,}5 \text{ cm}; \\ \\ y_f = \dfrac{I_{\Delta f}}{S_{\Delta f}} = \dfrac{0{,}882 \cdot 10}{0{,}252} = 35 \text{ cm}; \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$B'_f:\begin{cases} x'_f=\dfrac{I_{\Delta' f}}{S_{\Delta' f}}=\dfrac{2{,}132\cdot 10}{0{,}481}=44{,}3 \text{ cm}; \\ y'_f=\dfrac{I_{\Delta\Delta' f}}{S_{\Delta' f}}=\dfrac{1{,}37\cdot 10}{0{,}481}=28{,}4 \text{ cm}. \end{cases}$$

Fie B, B' reciprocele dreptelor Δ, Δ' în raport cu A_{1b} (la treimile axelor).

Punctul B_1 este pe dreapta B_fB, iar B'_1 pe dreapta B'_fB'. Avem:

$$\overline{B_1B}=\frac{\overline{B_fB}\cdot S_{\Delta f}}{S_{\Delta b_1}+S_{\Delta f}}=\frac{4{,}5\cdot 0{,}252}{1{,}5}=0{,}8 \text{ cm},$$

$$\overline{B'_1B'}=\frac{\overline{B'_fB'}\cdot S_{\Delta' f}}{S_{\Delta' b_1}+S_{\Delta' f}}=\frac{23\cdot 0{,}48}{2{,}98}=3{,}7 \text{ cm}.$$

Fiind date (dr Δ, Δ'; B_1, B'_1), determinăm axa neutră grafic sau analitic. Vom proceda analitic folosind formulele (3.4). În raport cu sistemul de axe Δ, Δ', avem: $E(80;\ 36)$, $G_1(48{,}2;\ 24{,}3)$, $B_1(51;\ 33{,}7)$, $B'_1(63{,}2;\ 25{,}7)$. Coordonatele punctelor B_1, B'_1 s-au măsurat la scară.

Punctele Q_1, Q'_1 ale axei neutre $R_1R'_1$ sînt pe dreptele G_1B_1, $G_1B'_1$, respectiv față de axele Δ, Δ' la distanțele:

$$y_{Q_1}=\frac{24{,}3\,(33{,}7-36)}{24{,}3-36}=4{,}8 \text{ cm}; \quad x_{Q'}=\frac{48{,}2\,(63{,}2-80)}{48{,}2-80}=25{,}5 \text{ cm}.$$

b) Determinăm axa neutră $R_2R'_2$ corespunzătoare punctului E, cînd lucrează secțiunea de beton $CR_1R'_1FL=A_{2b}$ și secțiunea armăturii A_f. Notăm $CDFL+A_f=A_{f'}$, $R_1DR'_1=A_{2b'}$ și fie G'_2, $B_{2b'}$, $B'_{2b'}$ centrul de greutate al secțiunii $A_{2b'}$ și reciprocele dreptelor Δ, Δ' în raport cu această secțiune ($B_{2b'}$, $B'_{2b'}$ sînt la mijloacele medianelor respective).

Avem: $A_{2b'}=1\,110$ cm^2, iar momentele statice ale lui $A_{2b'}$ în raport cu Δ și Δ' sînt:

$$S_{\Delta b'_2}=1\,110\cdot 15{,}4=1{,}71\cdot 10^4 \text{ cm}^3; \quad S_{\Delta' b'_2}=1\,110\cdot 16{,}2=1{,}80\cdot 10^4 \text{ cm}^3.$$

Centrul de greutate G_2 al secțiunii $A_{2b}+A_f=A_{f'}-A_{2b'}$ este pe $G_1G'_2$ dat de distanța:

$$\overline{G_1G_2}=\frac{-\overline{G_1G'_2}\cdot A_{2b'}}{A_{1b}+A_f-A_{2b'}}=-\frac{33{,}5\cdot 1\,110}{6\,180-1\,110}=-7{,}3 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Punctele B_2, B'_2, reciprocele axelor Δ, Δ' în raport cu secțiunea considerată $A_f - A_{2b'}$ sînt pe dreptele $B_1B_{2b'}$, $B'_1B'_{2b'}$ date de distanțele:

$$\overline{B_1B_2} = -\frac{\overline{B_1B_{2b'}} \cdot S_{\Delta b'_2}}{S_{\Delta b_1} + S_{\Delta f} - S_{\Delta b'_2}} = -\frac{40{,}2 \cdot 0{,}171}{1{,}5 - 0{,}171} = -5{,}2 \text{ cm},$$

$$\overline{B'_1B'_2} = -\frac{\overline{B'_1B'_{2b'}} \cdot S_{\Delta' b'_2}}{S_{\Delta' b_1} + S_{\Delta' f} - S_{\Delta' b'_2}} = -\frac{41{,}5 \cdot 0{,}18}{2{,}98 - 0{,}18} = -2{,}7 \text{ cm}.$$

Pentru determinarea axei neutre $R_2R'_2$, aplicăm ca mai sus formulele (3.4). In raport cu sistemul de axe Δ, Δ' avem:

$$G_2(55{,}5;\ 26), \quad B_2(56{,}2;\ 34{,}7), \quad B'_2(65{,}7;\ 26{,}4).$$

Punctele Q_2, Q'_2 ale axei neutre $R_2R'_2$ sînt pe G_2B_2, $G_2B'_2$, respectiv față de axele Δ, Δ', la distanțele:

$$y_{Q_2} = \frac{26\,(34{,}7 - 36)}{26 - 36} = 3{,}4 \text{ cm}; \quad x_{Q'_2} = \frac{55{,}5\,(65{,}7 - 80)}{55{,}5 - 80} = 32{,}4 \text{ cm}.$$

c) Să căutăm axa neutră $R_3R'_3$, considerîndu-se secțiunea $R_2CLR'_2 + A_f = A_{3b} + A_f$. Notăm secțiunea $R_2DFR'_2 = A_{3b'}$ și fie G'_3, $B_{3b''}$, $B'_{3b''}$, centrul de greutate și reciprocele dreptelor Δ, Δ' în raport cu $A_{3b'}$. Aceste puncte se determină cu ajutorul tabelelor din cap. II. Avem:

$$A_{3b'} = 1\,600 \text{ cm}^2, \quad S_{\Delta b'_3} = 1\,600 \cdot 18{,}2 = 2{,}91 \cdot 10^4 \text{ cm}^3;$$

$$S_{\Delta' b'_3} = 1\,600 \cdot 19{,}5 = 3{,}12 \cdot 10^4 \text{ cm}^3,$$

$$\overline{B_1B_3} = \frac{69{,}5 \cdot 0{,}291}{1{,}50 - 0{,}291} = 16{,}8 \text{ cm}; \quad \overline{B'_1B'_3} = \frac{72 \cdot 0{,}312}{2{,}98 - 0{,}312} = 8{,}4 \text{ cm},$$

(B_3, B'_3 sînt pe $B_1B_{3b'}$, $B'_1B'_{3b'}$).

De asemenea, cunoaștem: $G_3(58{,}5;\ 26)$, $B_3(59{,}2;\ 35)$; $B'_3(67{,}4;\ 26{,}9)$ prin măsurare.

Punctele Q_3, Q'_3, care determină axa neutră $R_3R'_3$, se găsesc pe dreptele G_3B_3, $G_3B'_3$ și au respectiv ordonata și abscisa:

$$y_{Q_3} = \frac{26\,(35 - 36)}{26 - 36} = 2{,}6 \text{ cm}; \quad x_{Q'_3} = \frac{58{,}5\,(67{,}4 - 80)}{58{,}5 - 80} = 34 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Luăm pe R_3R_3' ca axă neutră reală și determinăm eforturile unitare.

Notăm cu G centrul de greutate al secțiunii $R_3CLR_3'=A_{4b}$ și cu S momentul static al secțiunii $A_{4b}+A_f'$ în raport cu R_3R_3'. Avem:

$$A_{4b}=3\,340\ \text{cm}^2;\quad S=3\,340\cdot 24+1\,180\cdot 2{,}6=83\,000\ \text{cm}^3.$$

Efortul unitar maxim în beton:

$$\sigma=\frac{N}{S}s=\frac{80\,000}{83\,000}\cdot 63{,}6=61{,}3\ \text{kg/cm}^2.$$

In armătură avem:

$$\sigma'=\frac{nN}{S}s'=\frac{15\cdot 80\,000}{83\,000}\cdot 56{,}6=820\ \text{kg/cm}^2\ \text{(compresiune)},$$

$$\sigma''=\frac{nN}{S}s''=\frac{15\cdot 80\,000}{83\,000}\cdot 40{,}7=590\ \text{kg/cm}^2\ \text{(întindere)}.$$

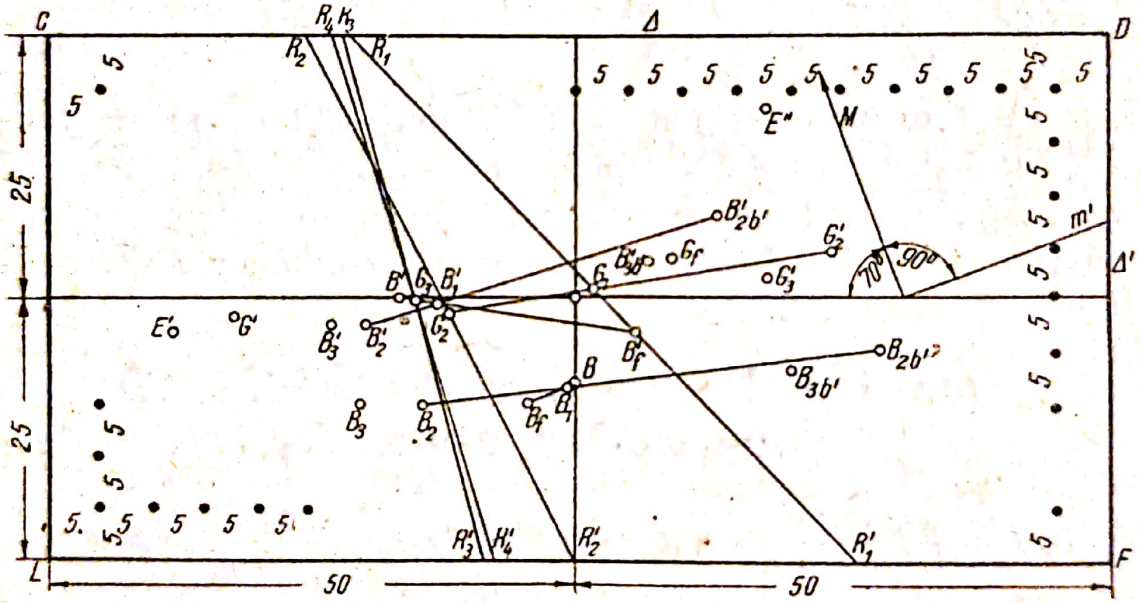

Fig. 6.19

Aplicația 18. Să se verifice secțiunea cadrului din problema precedentă, în ipoteza că este solicitată de un moment $M=30$ tm care face un unghi de 70° cu axa mare a secțiunii (fig. 6.19).

a) Se calculează aceleași elemente ca în cazul precedent și după aceea se procedează la determinarea axei neutre R_1R_1' corespunzătoare momentului M cînd lucrează secțiunea $A_{1b}+A_f$.

Scanned with OKEN Scanner

Axa neutră R_1R_1' o putem determina grafic sau analitic. O vom determina analitic folosind formula (3.6). Avem: $m' = -\frac{1}{\operatorname{tg}(-70)} = 0{,}364$ direcția punctului de aplicare al forței la ∞, $G_1(48{,}2;\ 24{,}3)$, $B_1(51;\ 33{,}7)$, $B_1'(63{,}2;\ 25{,}7)$. Axa neutră R_1R_1' trece prin G_1 și are direcția:

$$m_1 = \frac{0{,}364 \cdot 48{,}2\,(25{,}7-24{,}3) - 24{,}3\,(33{,}7-24{,}3)}{0{,}364 \cdot 48{,}2\,(63{,}2-48{,}2) - 24{,}3\,(51-48{,}2)} = -1{,}04.$$

b) Se consideră secțiunea $LCR_1R_1' + A_f = A_{2b} + A_f$ și aflăm axa neutră R_2R_2'. Centrul de greutate G_2' al secțiunii $R_1DFR_2' = A_{2b'}$ și reciprocele $B_{2b'}$, $B_{2b'}'$ ale axelor Δ, Δ' în raport cu aceeași secțiune le determinăm cu ajutorul tabelelor de la cap. II, § 4.

Avem $A_{2b'} = 2\,360$ cm^2, iar momentele statice ale lui $A_{2b'}$ în raport cu Δ, Δ' sînt:

$$S_{\Delta b_2'} = 2\,360 \cdot 20{,}6 = 4{,}85 \cdot 10^4 \text{ cm}^3;$$

$$S_{\Delta' b_2'} = 2\,360 \cdot 25{,}7 = 6{,}06 \cdot 10^4 \text{ cm}^3.$$

Centrul de greutate G_2 al secțiunii $A_{2b} + A_f$ este pe G_1G_2', dat de distanța:

$$\overline{G_1G_2} = -\frac{\overline{G_1G_2'}A_{2b'}}{A_{b_1} + A_f - A_{2b'}} = -\frac{22{,}7 \cdot 2\,360}{6\,180 - 2\,360} = -14 \text{ cm}.$$

Punctele B_2, B_2', reciprocele axelor Δ, Δ' în raport cu $A_{2b} + A_f$ sînt pe $B_1B_{2b'}$, $B_1B_{2b'}'$ și le găsim la fel ca în cazul problemei precedente:

$$\overline{B_1B_2} = -\frac{29{,}1 \cdot 0{,}485}{1{,}5 - 0{,}485} = -13{,}9 \text{ cm};$$

$$\overline{B_1'B_2'} = -\frac{27{,}7 \cdot 0{,}606}{2{,}98 - 0{,}606} = -7{,}1 \text{ cm}.$$

Axa neutră R_2R_2' trece prin G_2 și direcția sa este dată de formula (3.6). Avem: $m' = 0{,}364$, $G_2(62;\ 26{,}2)$, $B_2(64{,}6;\ 35{,}1)$, $B_2'(69{,}7;\ 27{,}5)$ și R_2R_2' are direcția:

$$m_2 = \frac{0{,}364 \cdot 62\,(27{,}5-26{,}2) - 26{,}2\,(35{,}1-26{,}2)}{0{,}364 \cdot 62\,(69{,}7-62) - 26{,}2\,(64{,}6-62)} = -1{,}92.$$

c) Căutăm axa neutră R_3R_3' pentru secțiunea $LCR_2R_2'+$ $+A_f=A_{3b}+A_f$. Aflăm întîi centrul de greutate G_3' al secțiunii $R_2DFR_3'=A_{3b'}$ și reciprocele $B_{3b'}$, $B_{3b'}'$ ale axelor Δ, Δ' în raport cu $A_{3b'}$ cu ajutorul tabelelor. Avem:

$$A_{3b'}=3\,140\ \text{cm}^2;$$

$$S_{\Delta b_3'}=7{,}25\cdot10^4\ \text{cm}^3;\quad S_{\Delta' b_3'}=9{,}98\cdot10^4\ \text{cm}^3.$$

Găsim G_3 centrul de greutate al secțiunii $A_{3b}+A_f$ și reciprocele B_3, B_3' ale axelor Δ, Δ' în raport cu această secțiune. Punctele G_3, B_3. B_3' sînt pe dreptele: G_1G_3', $B_1B_{3b'}$, $B_1'B_{3b'}'$ etc. Găsim: $G_3(65{,}2;\ 25{,}2)$, $B_3(70{,}5;\ 35)$, $B_3'(73{,}1;\ 27{,}3)$:

$$m_3=\frac{0{,}364\cdot65{,}2\,(27{,}3-25{,}2)-25{,}2\,(35-25{,}2)}{0{,}364\cdot65{,}2\,(73{,}1-65{,}2)-25{,}2\,(70{,}5-65{,}2)}=3{,}70.$$

Se poate trage concluzia că, dacă mai căutăm o axă neutră R_4R_4', aceasta va fi foarte aproape de R_3R_3' (pe figură s-a dus și R_4R_4'), deci putem considera ca axă neutră reală pe R_3R_3'.

Eforturile unitare maxime: determinăm secțiunea $LCR_3R_3'=A_{3b}$, centrul său de greutate G', cum și reciprocul dreptei R_3R_3' în raport cu A_{3b} și apoi calculăm momentele statice S_b, S_f ale secțiunilor A_{3b}, A_f în raport cu R_3R_3':

$$A_{3b}=1\,730\ \text{cm}^2;\quad S_b=1\,730\cdot16{,}7=28\,900\ \text{cm}^3;$$

$$S_f=1\,180\cdot24{,}6=29\,000\ \text{cm}^3.$$

Se verifică deci că $S_b\approx S_f$.

Menționăm că, pentru aflarea eforturilor unitare, putem aplica diferite metode. Astfel, pentru secțiunea $A_{3b}+A_f$ se pot aplica metodele de la secțiuni omogene, solicitate de un moment.

Vom proceda astfel: determinăm punctul reciproc $E''(a'', b'')$ al axei R_3R_3' în raport cu secțiunea A_f, folosind formulele (3.64).

Avem;

$$a''=\frac{\xi_0\,(x_{Q'}-x_f')}{x_{Q'}-\xi_0};\qquad b''=\frac{\eta_0\,(y_Q-y_f)}{y_Q-\eta_0},$$

unde $Q(x_Q, y_Q)$, $Q'(x_Q, y_{Q'})$ sînt intersecțiile axei R_3R_3' cu G_fB_f, G_fB_f'; găsim: $a''=32{,}3$ cm; $b''=6{,}8$ cm.

(Se verifică că $E'E''$ este paralelă cu direcția m' normală pe moment). Efortul unitar maxim în beton:

$$\sigma_L=\frac{M}{S_b\cdot\overline{E'E''}}\cdot s=\frac{3\,000\,000}{28\,900\cdot 60}\cdot 40=71{,}5\ \text{kg/cm}^2.$$

Eforturile unitare maxime în armătură:

$$\sigma'=\frac{nM}{S_b\cdot\overline{E'E''}}\cdot s'=\frac{15\cdot 3\,000\,000}{28\,900\cdot 60}\cdot 33{,}7=770\ \text{kg/cm}^2\ \text{(compresiune)},$$

$$\sigma''=\frac{15\cdot 3\,000\,000}{18\,900\cdot 60}\cdot 63{,}5=1\,650\ \text{kg/cm}^2\ \text{(întindere)}.$$

Aplicația 19. O secțiune de beton armat, la un pod de cale ferată, cu dimensiunile din fig. 6.20, fiind armată cu 21 fiare avînd ∅ 20 mm, este solicitată în punctul $E(43;-15)$

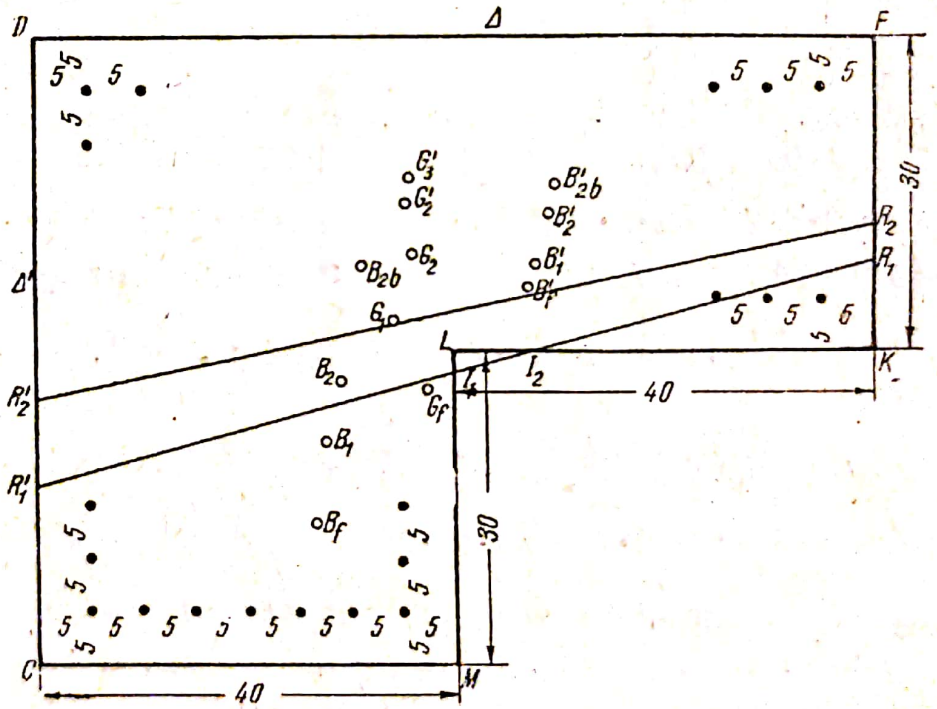

Fig. 6.20

de o forță de compresiuue $N=40$ t. Se cer eforturile unitare maxime în beton și armătură (axele de coordonate DF și DC).

Procedăm asemănător ca la aplicația 17. Luăm ca axe Δ, Δ', pe DF, DC.

Scanned with OKEN Scanner

Căutăm axa neutră pentru întreaga secțiune de beton și armătură:

$$A_{1b}=3600\ \text{cm}^2;\quad A_f=21\omega=990\ \text{cm}^2;\quad A_{1b}+A_f=4590=$$

$$=0{,}459\cdot 10^4\ \text{cm}^2;$$

$$S_{\Delta b_1}=40\cdot\frac{60^2}{2}+40\cdot\frac{30^2}{2}=0{,}9\cdot 10^5\ \text{cm}^3;$$

$$S_{\Delta' b_1}=30\cdot\frac{80^2}{2}+30\cdot\frac{40^2}{2}=1{,}2\cdot 10^5\ \text{cm}^3;$$

$$S_{\Delta f}=[5\cdot 5+4\cdot 25+7\cdot 55+10+2(45+50)]\,\omega=710\omega=$$

$$=0{,}344\cdot 10^5\ \text{cm}^3;$$

$$S_{\Delta' f}=[5\cdot 5+5(2+3+\ldots+7)+3\cdot 35+10^2+2(65+70+75)]\,\omega=$$

$$=785\omega=0{,}370\cdot 10^5\ \text{cm}^3;$$

$$I_{\Delta f}=[5\cdot 5^2+4\cdot 25^2+7\cdot 55^2+10^2+2(45^2+50^2)]\,\omega=$$

$$=32\,950\omega=1{,}553\cdot 10^6\ \text{cm}^4;$$

$$I_{\Delta' f}=[5\cdot 5^2+5^2(2^2+3^2+\ldots+7^2)+3\cdot 35^2+10^2+$$
$$+2(65^2+70^2+75^2)]\,\omega=36\,875\omega=1{,}738\cdot 10^6\ \text{cm}^4;$$

$$I_{\Delta\Delta' f}=(2\cdot 5\cdot 7{,}5+2\cdot 5\cdot 47{,}5+7\cdot 55\cdot 20+2\cdot 35\cdot 47{,}5+35\cdot 25+$$
$$+3\cdot 25\cdot 70+3\cdot 5\cdot 70+5\cdot 10)\,\omega=18\,800\omega=0{,}886\cdot 10^6\ \text{cm}^4;$$

$$I_{\Delta b_1}=\frac{1}{3}40\cdot 30^3+\frac{1}{3}\cdot 40\cdot 60^3=3{,}24\cdot 10^6\ \text{cm}^4;$$

$$I_{\Delta' b_1}=\frac{1}{3}30\cdot 80^3+\frac{1}{3}30\cdot 40^3=5{,}76\cdot 10^6\ \text{cm}^4;$$

$$I_{\Delta\Delta' b_1}=80\cdot 30\cdot 40\cdot 15+40\cdot 30\cdot 20\cdot 45=2{,}52\cdot 10^6\ \text{cm}^4.$$

Centrul de geutate $G_1(\xi_1, \eta_{11})$ al secțiunii $A_{1b}+A_f$ are coordonatele:

$$\xi_1=\frac{1{,}57\cdot 10}{0{,}459}=34{,}3\ \text{cm};\quad \eta_{11}=\frac{1{,}234\cdot 10}{0{,}459}=27{,}0\ \text{cm}.$$

Centrul de greutate $G_f(\xi_0, \eta_0)$ al secțiunii armăturii este dat de:

$$\xi_0=\frac{785}{21}=37{,}4\ \text{cm};\quad \eta_0=\frac{710}{21}=33{,}8\ \text{cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Punctele reciproce $B_1(x_1, y_1)$, $B_1'(x_1', y_1')$ ale axelor Δ, Δ' în raport cu $A_{1b}+A_f$ au coordonatele:

$$x_1=\frac{I_{\Delta\Delta' b_1}+I_{\Delta\Delta' f}}{S_{\Delta b_1}+S_{\Delta f}}=\frac{34{,}06}{1{,}234}=27{,}6 \text{ cm};$$

$$y_1=\frac{I_{\Delta b_1}+I_{\Delta f}}{S_{\Delta b_1}+S_{\Delta f}}=\frac{47{,}93}{1{,}234}=38{,}8 \text{ cm};$$

$$x_1'=\frac{I_{\Delta' b_1}+I_{\Delta' f}}{S_{\Delta' b_1}+S_{\Delta' f}}=\frac{74{,}98}{1{,}57}=47{,}7 \text{ cm};$$

$$y_1'=\frac{I_{\Delta\Delta' b_1}+I_{\Delta\Delta' f}}{S_{\Delta' b_1}+S_{\Delta' f}}=\frac{34{,}06}{1{,}57}=21{,}7 \text{ cm}.$$

Determinăm axa neutră R_1R_1' cu formulele (3.4). Avem $E(43, -15)$

$$y_{Q_1}=\frac{27\,(38{,}8+15)}{27+15}=34{,}6 \text{ cm}; \quad x_{Q_1'}=\frac{34{,}3\,(47{,}7-43)}{34{,}3-43}=-18{,}5 \text{ cm}.$$

Determinăm axa neutră R_2R_2' corespunzătoare punctului E cînd lucrează secțiunea de beton $R_1'DFR_1I_2LI_1+A_f=A_{2b}+A_f$.

Intrucît triunghiul LI_1I_2 este relativ mic, considerăm secțiunea trapezoidală $R_2'DFR_1+A_f=A_{2b}+A_f$.

Reciprocele B_f, B_f' ale axelor Δ, Δ' în raport cu A_f sînt:

$$B_f\left(x_f=\frac{I_{\Delta\Delta' f}}{S_{\Delta f}}=\frac{8{,}86}{0{,}334}=26{,}5 \text{ cm}; \quad y_f=\frac{15{,}53}{0{,}334}=46{,}5 \text{ cm}\right);$$

$$B_f'\left(x_f'=\frac{I_{\Delta' f}}{S_{\Delta' f}}=\frac{17{,}38}{0{,}37}=47 \text{ cm}; \quad y_f'=\frac{8{,}86}{0{,}37}=23{,}9 \text{ cm}\right).$$

Aflăm cu ajutorul tabelelor centrul de greutate G_2' al lui A_{2b} și reciprocele B_{2b}, B_{2b}' ale axelor Δ, Δ' în raport cu A_{2b}. Mai avem:

$$A_{2b}=2\,560 \text{ cm}^2; \quad S_{\Delta b_2}=0{,}401\cdot 10^5 \text{ cm}^3; \quad S_{\Delta' b_2}=0{,}910\cdot 10^5 \text{ cm}^3.$$

Centrul de greutate G_2 al secțiunii $A_{2b}+A_f$ este pe G_fG_2' dat de:

$$G_2G_f=\frac{G_fG_2'\cdot A_{2b}}{A_{2b}+A_f}=\frac{18\cdot 2\,560}{2\,560+990}=13{,}0 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Reciprocele B_2, B_2' ale axelor Δ, Δ' în raport cu $A_{2b}+A_f$ sînt pe dreptele B_fB_{2b}, $B_f'B_{2b}'$ date de:

$$\overline{B_fB_2}=\frac{\overline{B_fB_{2b}}S_{\Delta b_2}}{S_{\Delta b_2}+S_{\Delta f}}=\frac{25\cdot 0{,}401}{0{,}735}=13{,}7 \text{ cm},$$

$$\overline{B_f'B_2'}=\frac{\overline{B_f'B_{2b}'}S_{\Delta' b_2}}{S_{\Delta' b_2}+S_{\Delta' f}}=\frac{10\cdot 0{,}910}{1{,}28}=7{,}10 \text{ cm}.$$

Aplicăm din nou formulele (3,4) pentru determinarea axei R_2R_2'. Avem:

$$E(43,\ -15),\quad B_2(29{,}2;\ 32{,}9),\quad B_2'(49;\ 16{,}7),\quad G_2(36;\ 20{,}7);$$

$$y_{Q_2}=\frac{20{,}7\,(32{,}9+15)}{20{,}7+15}=27{,}8 \text{ cm};\quad x_{Q_2'}=\frac{36\,(49-43)}{36-43}=-31 \text{ cm}.$$

(Punctele Q_2, Q_2' determină axa R_2R_2' și se găsesc pe G_2B_2, G_2B_2').

Dacă se caută și R_3R_3', aceasta este foarte apropiată de R_2R_2', astfel că putem considera pe R_2R_2' ca axă neutră reală. Avem:

$$A_{3b}=R_2DFR_2'=2\,100 \text{ cm}^2.$$

Momentul static S al secțiunii $A_{3b}+A_f$ în raport cu R_2R_2' este:

$$S=2\,100\cdot 13{,}4-990\cdot 6{,}7=21\,460 \text{ cm}^3.$$

Efortul unitar maxim în beton:

$$\sigma_D=\frac{N}{S}s=\frac{40\,000}{21\,460}\cdot 33{,}7=62{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Eforturile unitare maxime în armătură:

$$\sigma'=\frac{nN}{S}s'=\frac{15\cdot 400\,000}{21\,460}\cdot 28=785 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresiune)},$$

$$\sigma''=\frac{nN}{S}s''=\frac{15\cdot 40\,000}{21\,460}\cdot 27=755/\text{cm}^2 \text{ (întindere)}.$$

TABLA DE MATERII

Prefața 3

Cap. I. **Noțiuni fundamentale** 5

§ 1. Considerații generale. Ipoteze 5

§ 2. Expresiile analitice ale efortului unitar 6

§ 3. Clasificarea problemei după punctul de aplicare al forței solicitante 10

§ 4. Determinarea expresiei efortului unitar și a punctului de aplicare al forței, cînd se cunoaște axa neutră 12

§ 5. Involuție. Momente de inerție 15

A. Proiectivitate. Involuție 15

B. Axe conjugate. Diametri conjugați 18

C. Momente de inerție 19

§ 6. Figuri reciproce 23

A. Transformări prin polare reciproce. Definiția figurilor reciproce. Proprietăți 23

B. Figuri reciproce în involuție 26

C. Aplicarea figurilor reciproce la determinarea momentelor de inerție 27

Cap. II. **Elemente geometrice necesare calculului secțiunilor** 30

§ 1. Principii de calcul 30

§ 2. Secțiunea triunghiulară 31

A. Metode analitice 31

B. Metode grafice 36

§ 3. Secțiune în formă de paralelogram 41

§ 4. Secțiune trapezoidală 42

A. Metode grafice 42

B. Determinarea analitică a simburelui central 44

§ 5. Secțiune în formă de patrulater oarecare 49

A. Metoda analitică 49

B. Metode grafice 51

§ 6. Secțiune poligonală 53

A. Metoda analitică 53

B. Metode grafice sau grafo-analitice 54

Cap. III. **Determinarea eforturilor unitare la secțiuni omogene** 55

§ 1. Determinarea eforturilor unitare folosind relațiile care determină punctul de aplicare al forței 55

A. Determinarea eforturilor unitare folosind două drepte oarecare care nu trec prin G și punctele lor reciproce 56

B. Determinarea eforturilor unitare cînd se dau două drepte, dintre care una trece prin G, și punctele lor reciproce 67
§ 2. Determinarea eforturilor unitare prin involuție, cînd se dau două drepte și punctele lor reciproce 71
§ 3. Determinarea eforturilor unitare prin metoda transformărilor 75
A. Metoda analitică 75
B. Metoda geometrică 82
§ 4. Determinarea punctului reciproc al unei drepte date . 90
A. Determinarea punctului reciproc al unei drepte cînd se dau (dr Δ, Δ'; B, B'), dreptele Δ, Δ' netrecînd prin centrul de greutate G 90
B. Determinarea punctului reciproc al unei drepte utilizînd două drepte, dintre care una trece prin centrul de greutate G 94
C. Aplicarea involuției la determinarea punctului reciproc al unei drepte 95
§ 5. Determinarea eforturilor unitare cu ajutorul simburelui central 95

Cap. IV. **Calculul elementelor de beton armat solicitate excentric, prin metoda rezistențelor admisibile** 97
§ 1. Metoda I. 97
A. Secțiuni oarecare 97
B. Secțiuni dreptunghiulare 100
§ 2. Metoda a II-a a aproximațiilor succesive 102
A. Secțiuni oarecare 102
B. Secțiuni dreptunghiulare 104
§ 3. Metoda a III-a 105

Cap. V. **Bare curbe avînd curbură mare** 107
§ 1. Determinarea eforturilor unitare 107
§ 2. Elemente geometrice ale barelor curbe 110
A. Calculul lui k 110
B. Calculul razei de curbură 111

Cap. VI. **Aplicații** 116
Tabla de materii 151

T. 731

Recenzent : Ing. Pitiș Alexandru
Control științific : Prof. Mangeron D. și Mazilu P.

Responsabil de carte : Ing. Davidescu Alexandru
Tehnoredactor : Vasilescu Miliana
Corector responsabil : Voinescu Ecaterina

Dat la cules 15. II. 56. Bun de tipar 28. III. 56. Hîrtie cărți școlare de 65 g/m² 61×86/16. Coli editoriale 8,22. Coli de tipar 9,5
Comanda S 2923 A 06967.
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari 539.4
Indicele de clasificare pentru bibliotecile mici 539.

Tiparul executat sub comanda nr. 470 la Intreprinderea Poligrafică Timișoara str. Popa Șapcă 8. — R.P.R.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

731

MIU ION
METODE NOI PENTRU CALCULUL SECȚIUNILOR SOLICITATE EXCENTRIC

EDITURA TEHNICĂ

Secția 200

Prețul lei 3,60

Borderou nr. .....

Data .....

Rămîne la unitate

731

MIU ION
METODE NOI PENTRU CALCULUL SECȚIUNILOR SOLICITATE EXCENTRIC

EDITURA TEHNICĂ

Secția 200

Prețul lei 3,60

Se trimite la Centrul Regional